西 南 大 学

2008年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：理论物理、凝聚态物理、 光学专业　　研究方向：所有方向

试题名称： 高等数学　　　　　　试题编号：613

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效）

一、填空题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ 等于__________.

2. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$ 的极值__________.

3. C 是 $x^2+y^2=a^2$ 的反向一周，则 $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$ 等于__________.

4. 已知 $z=x^2-y^2$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，求 $\dfrac{dz}{dt}$ 等于__________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}(x-1)^n$ 的收敛域为__________.

6. 微分方程 $xy'+y=e^x\quad(x>0)$ 的通解为________________.

7. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$______________.

8. 设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，那么 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 的线性关系为____________.

9. 已知向量 $a_1=(2,3,4,5)^T,a_2=(3,4,5,6)^T,a_3=(4,5,6,7)^T,a_4=(5,6,7,8)^T$，则秩 $r(a_1,a_2,a_3,a_4)$

   为________.

10. 已知 A^* 是n阶方阵A的伴随矩阵，行列式 $|A|=2$，则 $|2A^*|=$__________.

二、选择题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

1. 求函数 $y=x^2\sin(x-2)$ 在 $x=2$ 点的导数值

A. 0　　B. 2　　C. -2　　D. 4　　[ ]

2. 方程 $y'\sin x = y\ln y$ 满足条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$ 的特解是

A. $\frac{e}{\sin x}$　　B. $e^{\sin x}$　　C. $\frac{e}{\tan\frac{x}{2}}$　　D. $e^{\tan\frac{x}{2}}$　　[ ]

3. 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，但不可导，又 $g'(a)$ 存在，则 $g(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导的[ ]条件

A. 充要　　B. 充分非必要　　C. 必要非充分　　D. 非充分非必要

4. 求平面 π_1： $2x-y+z-6=0$ 与 π_2： $x+y+2z-5=0$ 的夹角

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{4}$　　[ ]

5. 求积分 $\int_0^{2\pi}\sin^n x\cos^m dx$ 的值，其中自然数 n,m 为奇数

A. 1　　B. π　　C. $\frac{7}{5}\pi$　　D. 0　　[ ]

6. 方程 $y''-2y'+3y=e^x\sin\left(\sqrt{2}x\right)$ 的特解的形式为

A. $e^x\left[A\cos\left(\sqrt{2}x\right)+B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]$

B. $xe^x\left[A\cos\left(\sqrt{2}x\right)+B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]$

C. $Ae^x\sin\left(\sqrt{2}x\right)$

D. $Ae^x\cos\left(\sqrt{2}x\right)$　　[ ]

7. n 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解的充要条件是

A. $|A|=0$　　B. 系数矩阵 A 的秩等于其增广矩阵的秩

C. 系数矩阵的秩不等于其增广矩阵的秩　　D. $|A|>0$　　[ ]

8. 关于矩阵 A,B 的秩下列说法中不正确的是

A. A 的行秩等于列秩

B. A 的行秩和列秩都等于矩阵中非零子式的最高阶数

C. AB 的秩不超过 A 或 B 的秩

D. AB 的秩大于 A 或 B 的秩 [ ]

9. 设 A,B 为阶方阵，且 A 与 B 相似，则

A. $\lambda E - A = \lambda E - B$

B. A 与 B 有相同的特征值和相同的特征向量

C. A 与 B 相似于同一个对角矩阵

D. 对任意 k， $kE - A = kE - B$ 相似 [ ]

10. 以下四个命题错误的是

A. m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关

B. 设向量组 $A: a_1, a_2, \cdots a_m$ 线性无关，而向量组 $B: a_1, a_2, \cdots a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示是唯一的

C. 若向量组 A 中有线性无关 n 个向量，则 A 向量组增加同维数的一个向量后生成向量组 B $(\text{n}+1\text{个向量})$ 必定是线性无关的

D. 若 n 维线性无关的向量组 A，增加一维后变为 n+1 维的向量组 B，则必定有 B 向量组线性无关 [ ]

三、(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$.

2. 求积分 $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$.

3. 设 $s = u^2 + v^2, u = \tan xy^2, v = \cos x^2 y$，求 ds .

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2} dxdy$，其中 D 为区域：$0 \le x \le 2$， $x \le y \le 2$.

5. 求方程 $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{71}{2}\cos 2x$ 的通解.

四、(本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -x & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展为傅里叶级数.

五、(本题共 2 小题，每小题 12 分，满分 24 分)

1. 讨论 λ 取何值时，方程组

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$$

有唯一解、无穷多解及无解，并在有解的情况下求出解.

2. 已知三维向量空间 R^3 的一个基本：a_1, a_2, a_3，设

$$\beta_1 = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3$$
$$\beta_2 = 2a_1 + a_2 + 2a_3$$
$$\beta_3 = a_1 + 5a_2 + 3a_3$$

(1). 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也为 R^3 的一个基；

(2). 求由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 a_1, a_2, a_3 的过渡矩阵；

(3). 若向量 a 在基 a_1, a_2, a_3 下是坐标为 $(1,-2,0)$，求 a 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

六、(本题满分 8 分)

试证：$\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$，$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$，$\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ 在同一平面上，并将 $\vec{c}$ 用 $\vec{a}$ $\vec{b}$ 表示出来.

七、(本题满分 8 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$，证明 $A^2 = lA$，并求 l.