

西南大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业:

研究方向:

试题名称: 数学 试题编号: 704

(答题一律做在答题纸上, 并注明题目番号, 否则答题无效)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} =$ _____;

2、若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x} , 则 $\int df(x) =$ _____;

3、 $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx =$ _____;

4、设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____;

5、设 A 为 3 阶方阵, $|A| = 4$, 则 $\left| \frac{1}{2} A^2 \right| =$ _____;

6、向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, -1)$, $\alpha_3 = (4, 1, -1)$ 的秩为 _____;

7、当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 $a \sin^2 \frac{x}{2}$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____

二、单项选择题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1、若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 则必有 ();

(A) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$,

(B) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$

(C) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow a} kf'(x) = \infty$ (k 为非零常数)

2、函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极大值, 则必有 ();

(A) $f'(x_0) = 0$

(B) $f''(x_0) < 0$

(C) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

(D) $f'(x_0) = 0$ 或不存在的

3、如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续无零点, 但有使 $f(x)$ 取正值的点, 则在 $[a, b]$ 上 ();

(A) 可正可负

(B) 为正

(C) 为负

(D) 无界

4、若 $\int df(x) = \int dg(x)$, 则一定有 ();

(A) $f(x) = g(x)$

(B) $f'(x) = g'(x) + c$

(C) $df(x) = dg(x)$

(D) $d \int f'(x) dx = d \int g'(x) dx + c$

5、当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ();

(A) 无穷小

(B) 无穷大

(C) 有界但不是无穷小量

(D) 无界但不是无穷大量

6、设 A 为 n 阶方阵, 且秩 $R(A) = n - 1$, α_1, α_2 是 $AX = 0$ 的两个不同的解向量, 则 $AX = 0$ 的通解为 ();

(A) $k\alpha_1$

(B) $k\alpha_2$

(C) $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

(D) $k(\alpha_1 - \alpha_2)$.

7、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ ^{线性相关}, 则下列结论错误的是 ();

(A) α_1, α_2 线性无关

(B) α_4 可以表示为 α_1, α_2 的线性组合

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关

三、(10分) 给定曲线 $y = x^2 + 5x + 4$ ，试确定 b ，使直线 $y = 3x + b$ 为曲线的切线。

四、(10分) 计算

1、(5分) $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

2、(5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} \sqrt{1-t^2} dt}{x}$

五、(8分)

计算二重积分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + 2x - y) dx dy$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

六、(10分)

设当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + 1) = o(x^2)$ ，

求常数 a, b 。

七、(10分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ，试证明

$\int_0^x f(t) dt + \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根。

八、(10分) 证明：当 $0 < x < \pi$ 时，有 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$

九、(8分) 问 a 为何值时，函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值？

是极大值还是极小值？并求此极值。

十、(8分) 设 $y = y(x)$ 可微，且 $y(x) = \int_0^x y(t) dt + x + 1$ ，试求 $y(x)$

十一、(20 分)

1、(6 分) 设 A 为三阶方阵, 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 且 $|A| = 2$, 试求行列式 $|(\alpha_3 - 2\alpha_2, 4\alpha_2, 3\alpha_1)|$

2、(6 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 且

$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \beta_r = \alpha_r - \alpha_{r-1}$, 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$

也线性无关。

3、(8 分) λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解, 此时求通解.