

西南大学

2008年攻读^博士学位研究生入学考试试题
硕

学科、专业：数 学

研究方向：数学类各方向

试题名称：数学分析

试题编号：604

(答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效)

一、填空题(本题共5小题，每小题6分，满分30分。把答案填在答题纸上，并注明题目番号)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) =$ _____。

2. 已知 $x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} =$ _____。

3. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则 $a =$ _____, $b =$ _____。

4. 设函数 $y = y(x)$ 由 $x^y = y^x$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

5. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{nx} = \int_{-\infty}^{\alpha} te^t dt$ ，则常数 $\alpha =$ _____。

二、选择题(本题共5小题，每小题6分，满分30分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸上，并注明题目番号)

1. 设对任意的 x ，总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

【 】

- A. 等于零 B. 存在但不等于零 C. 一定不存在 D. 不一定存在

2. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$

所围区域, 则 $f(x, y) =$

【 】

A. xy

B. $2xy$

C. $xy + \frac{1}{8}$

D. $xy + 1$

3. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为

【 】

A. 不存在间断点

B. 存在间断点 $x = 1$

C. 存在间断点 $x = 0$

D. 存在间断点 $x = -1$

4. 设 f 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则 $f^{(n)}(x) =$

【 】

A. $n[f(x)]^{n+1}$

B. $n![f(x)]^{n+1}$

C. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$

D. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分条件是

【 】

A. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$

B. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$

C. $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$

D. $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

三、计算题 (本题满分 15 分)

设实数 $a < 1$, 且直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围图形 D_1 的面积为 S_1 , 直线 $y = ax$ 和直线 $x = 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围图形 D_2 的面积为 S_2 .

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形 $D_1 \cup D_2$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、(本题满分 15 分) 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x) dx$,

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

五、(本题满分 20 分)

设 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并有 $\int_0^1 \varphi(tx)dt = a\varphi(x)$ 其中 a 为常数。求 $\varphi(x)$ 的表达式。

六、(本题满分 20 分) 讨论下列级数的敛散性 (若收敛应指出是否条件收敛或绝对收敛)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, $p > 0$ 为常数.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right]$, 其中 $p > 0$ 为常数.

七、(本题满分 20 分)

设 f, g 都在 $[0,1]$ 上递增且连续, 证明:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx.$$