西 南 大 学

2008年攻读 ~~博~~ 硕 士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学学科所有专业　　　研究方向：数学学科所有方向

试题名称：高等代数　　　试题编号：819

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效）

注意：报考数学教育方向的考生完成1，2，3，4，5，6，9，10题，报考其余方向的考生完成1，2，3，4，5，6，7，8题。考试时间为3小时，满分为150分。

1．填空（每小题5分，共30分）

（1）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&4&9&x^2\\1&8&27&x^3\end{vmatrix}$ 的全部根是__________。

（2）设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$。令 $C=\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$，则 $|C|=$__________。

（3）元素为整数的3阶正交矩阵共有__________个。

（4）设 A 为数域 F 上 n 阶矩阵，A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 $n-1$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解是__________。

（5）设4阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，E 为4阶单位矩阵，则行列式 $|B^{-1}-E|=$__________。

（6）若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________。

2．（20 分）用正交线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$$

为标准形。

3．（20 分）计算 n 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & x & \cdots & x\\ 1 & x & 0 & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x & x & \cdots & 0\end{vmatrix}。$$

4．（20 分）在欧氏空间 R^n 中定义变换 σ：

$$\sigma(\alpha)=\alpha-k(\alpha,\varepsilon)\varepsilon,\forall\alpha\in R^n，$$

其中 ε 为 R^n 中单位向量，k 为实数，(α,ε) 表示 R^n 中内积。

（1）证明 σ 为线性变换；（2）求 k，使 σ 为正交变换。

5．（15 分）证明：

$$W=\{f(x)\in R[x]\mid f(1)=0,\deg f(x)<n\text{或}f(x)=0\}$$

关于多项式加法及数与多项式的数乘构成实数域 R 上线性空间，并求出它的一个基底及它的维数。其中 $\deg f(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的次数。

6．（15 分）证明：关于任意素数 p，多项式

$$f(x)=px^4+2px^3-px+(3p-1)$$

在有理数域上不可约。

7．（15 分）设 $f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=x^2+3x+2$ 为数域 F 上两个多项式，H 为 F 上 n 阶方阵，$A=f(H)$，$B=g(H)$。证明 $ABX=0$ 的每一解 X 都可唯一表为 $X=Y+Z$，其中 X，Y，Z 皆为 n 阶方阵，且 $BY=0$，$AZ=0$。

8．（15 分）设 σ，τ，δ 为复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，若 $\sigma\tau-\tau\sigma=\delta$，$\sigma\delta=\delta\sigma$，$\tau\delta=\delta\tau$，则 δ 的特征根全为零。

9．（15 分）已知矩阵 A，B，$A+B$ 均可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆。

10．（15 分）令 V 为复数域上一个 n 维线性空间，σ，τ 是 V 的线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$。

（1）证明 σ 的每一特征子空间都在 τ 之下不变；

（2）σ 与 τ 在 V 中有一公共特征向量。