

# 南京理工大学

## 2008 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 2008011034

考试科目: 高等数学 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案 (包括填空题) 按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分

一、 填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)。

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1 + 2x)]^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) (2) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos(ax))} = -3$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3)  $\int_1^2 (|x| + x^3) \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  而  $D$  表示全平面, 则

$$I = \iint_D f(x)g(y-x)dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(5) 微分方程  $y' = xy$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(6) 点  $(1, 2, 0)$  到平面  $3x + 4y + 5z = 0$  的距离  $d = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、 选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

(1) 曲线  $y = \frac{1}{1 - e^x}$  [ ]

(A) 仅有水平渐近线.

(B) 仅有铅直渐近线.

(C) 既有铅直又有水平渐近线.

(D) 既有铅直又有斜渐近线.

(2) 设函数  $f(x) = |x^3 - 1|\varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  在  $x=1$  处连续, 则  $\varphi(1) = 0$  是  $f(x)$

在  $x=1$  处可导的 [ ]

(A) 充分必要条件.

(B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

(3) 设  $f(x) = |x(1 - x)|$ , 则 [ ]

(A)  $x = 1$  是  $f(x)$  的极值点, 但  $(1, 0)$  不是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

(B)  $x = 1$  不是  $f(x)$  的极值点, 但  $(1, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

- (C)  $x = 1$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $(1, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点.  
 (D)  $x = 1$  不是  $f(x)$  的极值点,  $(1, 0)$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点.

(4) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数 [ ]

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛. (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛.  
 (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛. (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

### 三、解答题(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 共 40 分)

1. 设  $y = x \sin x$ , 求  $y^{(n)}(x)$ .

2. 设  $0 < a < b$ , 计算极限  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \int_0^1 [bx + a(1-x)]^t dx \right)^{\frac{1}{t}}$ .

3. 计算  $\oiint_{\Sigma} xz dy dz + 2yz dz dx - z^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与

$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  所围立体的表面外侧.

4. 求不定积分  $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}$ .

5. 计算  $I = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 1, x+y \geq 1$ .

四、(本题满分 10 分) 求连续函数  $f(x)$ , 使得满足  $\int_0^1 f(tx) dt = f(x) + xe^x$ .

五、(本题满分 10 分) 试证: 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ .

六、(本题满分 10 分) 将函数  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 展成以 2 为周期的傅立叶级

数, 并用之求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

七、(本题满分 10 分) 设  $f(x)$  具有二阶导数, 试确定  $f(x)$  使曲线积分

$\int_L [e^{kx} - 2f'(x) - f(x)] y dx + f'(x) dy$  ( $k$  为常数) 与积分路径无关.

八、(本题满分 10 分) 设  $f(x)$  可导, 证明在  $f(x)$  的两个零点之间一定存在

$f(x) + f'(x)$  的零点.

九、(本题满分 10 分)在变力  $F = \{yz, zx, xy\}$  的作用下, 质点由原点沿直线运动到

椭球面  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  上第一卦限的点  $M(a, b, c)$ , 问当  $a, b, c$  取何值时, 力  $F$  所

作的功  $W$  最大? 并求出  $W$  的最大值.