

电子科技大学  
2008 年攻读硕士学位研究生入学试题  
考试科目：代码 835 线性代数

注意事项：1、所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效。  
2、八个大题，共 150 分。

一 (18 分). 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ .

二 (18 分). 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 证明:  $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$ . 这里  $R(A)$  表示矩阵  $A$  的秩.

三 (18 分). 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶正交矩阵, 证明:  $A_{ij} = \pm a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 其中  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式.

四 (18 分).  $a, b$  为何值时, 方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = b, \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 3 - b, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$
 有解? 有解时求出解.

五 (21 分). 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $A \neq I$  ( $I$  表示单位矩阵),  $(A-I)(A+I) = 0$ .

1. 证明:  $R(A-I) + R(A+I) = n$ ;

2. 求  $A$  的一个特征值.

六 (18 分). 设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  是正定矩阵,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是任意  $n$  个非零实数. 证明:

$B = (a_{ij}b_ib_j)$  也是正定矩阵.

七 (18 分). 设  $R^3$  上的线性变换  $A$  为

$$A(x, y, z) = (x + 2y + z, y - z, x + z).$$

求  $A$  在基  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, -1, 1)$  下的矩阵.

八 (21 分). 设  $V_1, V_2$  是数域  $P$  上的线性空间.  $\forall (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in V_1 \times V_2, \forall k \in P$ , 规定:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \\ k(\alpha_1, \alpha_2) &= (k\alpha_1, k\alpha_2)\end{aligned}$$

1. 证明:  $V_1 \times V_2$  关于以上运算构成数域  $P$  上的线性空间;
2. 设  $\dim V_1 = m, \dim V_2 = n$ , 求  $\dim(V_1 \times V_2)$ .