

电子科技大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 611 数学分析

所有答案必须写在答题纸上, 写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题(每小题 5 分, 共 40 分)

1. 已知 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$, $a_1 = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} x = t + 2 + \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$ 在 $x = 2$ 处的切线方程为 _____.

4. $x = y^2 + y$, $u = (x^2 + x)^{\frac{3}{2}}$, 则 $\frac{dy}{du} =$ _____.

5. 已知 $y = \sin x$, $x = t^2$, 则 y 的二阶微分 $d^2y =$ _____.

6. 设 $I(y) = \int_y^{y^2} \frac{\cos xy}{x} dx$, 则 $I'(y) =$ _____.

7. 曲面 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, 则第一类曲面积分 $\iint_S (2x^2 + z^2) ds =$ _____.

8. 设 $f(x) = \cos \alpha x$, $|x| < \pi$, 其中 $\alpha \neq 0$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 _____.

二、(12 分) 证明: 实数集 \mathbb{R} 是不可列的.

三、(12 分) 证明: 区间 (a, b) 上的单调函数的间断点是第一类间断点.

四、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二次可微, 又 $f(a) = f(b) = 0$ 并且在区间 (a, b) 满足 $|f''(x)| \leq M$, 证明: $\forall x \in [a, b]$, 有 $|f(x)| \leq \frac{M}{8}(b-a)^2$.

五、(12 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n g(x) dx \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

六、(12 分) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $a_0 = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

七、(12 分) 证明不等式: $2\pi(\sqrt{17}-4) \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16+\sin^2 x + \sin^2 y}} \leq \frac{\pi}{4}$.

八、(12 分) 设 $f(u)$ 为连续函数, L 为分段光滑的简单闭曲线, 试证明: $\oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$.

九、(12 分) 叙述含参变量积分 $F(x) = \int_{\Gamma} f(x, y) dy$ ($x \in I$) 在区间 I 上一致收敛的定义, 判断积分 $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt$ 在区间 $[0, 1]$ 上是否一致收敛, 试证明你的结论.

十、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在实数集 \mathbb{R} 有定义, 证明: $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续当且仅当 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $f^{-1}((\alpha, \beta))$ 是一些开区间的并集.