2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（二）

数学三

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在，则 （ ）

（A）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处必可导；

（B）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导，但必连续；

（C）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定连续，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在；

（D）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不一定存在.

解答：$\underline{(B)}$

因为 $f'_-(x_0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，于是 $f(x_0-0)=f(x_0)$，

同理由 $f'_+(x_0)$ 存在，得 $f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$，故 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因为 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 不一定相等，所以选 (B)。

2．设 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $(1-x)f''(x)+3xf'^2(x)=1-e^{-x}$，若 $f'(0)=0$，则（ ）

$(A)f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大点；　　$(B)f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小点；

$(C)(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

$(D)f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

解答：$\underline{(C)}$

取 $x=0$，得 $f''(0)=0$，

$(1-x)f''(x)+3xf'^2(x)=1-e^{-x}$ 两边对 x 求导，得

$(1-x)f'''(x)-f''(x)+3f'^2(x)+6xf'(x)f''(x)=e^{-x}$，

取 $x=0$，得 $f'''(0)=1>0$，则 $x=0$ 为 $f'(x)$ 的极小点，而 $f'(0)=0$，所以存在 $\delta>0$，

当$0<|x|<\delta$时，$f'(x)>0$，所以$f(0)$不是$f(x)$的极值点，

由$f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=1>0$，根据极限的保号性，存在$\delta_1>0$，当$0<|x|<\delta_1$时，$\dfrac{f''(x)}{x}>0$，即当$x\in(-\delta_1,0)$时，$f''(x)<0$；当$x\in(0,\delta_1)$时，$f''(x)>0$，故$(0,f(0))$为曲线$y=f(x)$的拐点，选$(C)$。

3．设$u=f(x+y,xz)$有二阶连续的偏导数，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$　　（　）

(A) $f_2'+xf_{11}''+(x+z)f_{12}''+xzf_{22}''$；　　(B) $xf_{12}''+xzf_{22}''$；

(C) $f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$；　　(D) xzf_{22}''。

解答：(C)

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+zf_2'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xf_{12}''+f_2'+xzf_{22}''$，选$(C)$。

4．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\lambda}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$　（λ为常数）　　（　）.

（A）发散；　　（B）条件收敛；　　（C）绝对收敛；　　（D）收敛性与λ有关.

解答：(D)

因为$\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}\sim\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$，所以$n^{\lambda}\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}\sim\dfrac{\pi}{2n^{\frac{1}{2}-\lambda}}$，于是

当$\lambda\geq\dfrac{1}{2}$时级数发散，$-\dfrac{1}{2}\leq\lambda<\dfrac{1}{2}$时级数条件收敛，当$\lambda<-\dfrac{1}{2}$时级数绝对收敛。

5．设$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$为二阶非齐线性方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$的三个线性无关解，则该方程的通解为　　（　）

(A) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$；　　(B) $C_1[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$；

(C) $C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2[\varphi_1(x)-\varphi_3(x)]$；

(D) $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)$，其中$C_1+C_2+C_3=1$。

解答：(D)

6．设A,B是满足$AB=0$的任意两个非零阵，则必有　　（　）

文都教育

(A) A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

(B) A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关；

(C) A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

(D) A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关。

解答：(A)

设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $n\times s$ 矩阵，因为 A,B 为非零矩阵，所以 $r(A)\geq 1, r(B)\geq 1$，

又因为 $AB=0$，所以 $r(A)+r(B)\leq n$，所以 $r(A)<n$ 且 $r(B)<b$，即 A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关，选 (A)。

7．设 A 为三阶矩阵， λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值， α_1,α_2 是 A 的属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量， α_3 是 A 的属于特征值 λ_2 的特征向量，则向量组 $\alpha_1+A\alpha_3$，

$A(\alpha_2-\alpha_3)$， $A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的必要条件是 （ ）

(A) $\lambda_1=0$ 或者 $\lambda_1\lambda_2=1$； (B) $\lambda_1\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$；

(C) $\lambda_2=0$ 或者 $\lambda_1\lambda_2=1$； (D) $\lambda_2\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$。

解答：

(A)

$\alpha_1+A\alpha_3=\alpha_1+\lambda_2\alpha_3$， $A(\alpha_2-\alpha_3)=\lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_3$， $A\alpha_1+\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\alpha_3$，

$$(\alpha_1+A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1\end{pmatrix},$$

向量组 $\alpha_1+A\alpha_3$， $A(\alpha_2-\alpha_3)$， $A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的充分必要条件是

$r(\alpha_1+A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3)<3$ ， 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，于是向量组 $\alpha_1+A\alpha_3$， $A(\alpha_2-\alpha_3)$， $A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的充分必要条

文都教育

件是矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆，即 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$，于是 $\lambda_1 = 0$ 或者 $\lambda_1\lambda_2 = 1$，选 (A)。

8．设 $P(A) > 0, P(B) > 0$，且 A, B 相斥，下列关系式正确的是　　（　）

$(A)\ P(B) = P(B \mid A)$；　　$(B)\ P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$；

$(C)\ P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A)}{1-P(B)}$；　　$(D)\ P(B) = 1 - P(A)$。

解答：(C)

因为 A, B 互斥，所以 $P(AB) = 0$，

于是 $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(AB)}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A)}{1-P(B)}$，选 (C)。

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9．$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x + 3^x - \ln(e^2 + x)}{\arctan x} =$ _____。

解答：$\ln 6 - \dfrac{1}{e^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x + 3^x - \ln(e^2 + x)}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2^x - 1) + (3^x - 1) - \ln(1 + \frac{x}{e^2})}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}[\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} - \frac{\ln(1 + \frac{x}{e^2})}{x}] = \ln 2 + \ln 3 - \frac{1}{e^2} = \ln 6 - \frac{1}{e^2}。$$

10．差分方程 $y_{x+1} + 2y_x = 5x^2$ 的通解为 _____ 。

解答：$y = C(-2)^x + \dfrac{5}{3}x^2 - \dfrac{10}{9}x - \dfrac{5}{27}$

特征方程 $\lambda + 2 = 0$，特征根为 $\lambda = -2$，则原方程对应的齐次方程通解为

$y = C(-2)^x$。

令非齐方程的特解为 $y_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$，代入原方程整理得

$$3a_0 + a_1 + a_2 + (3a_1 + 2a_2)x + 3a_2 x^2 = 5x^2,$$

比较系数得

$$a_0=-\frac{5}{27},a_1=-\frac{10}{9},a_2=\frac{5}{3},$$

故原方程的通解为

$$y=C(-2)^x+\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{27}。$$

11．$\int(\arccos x)^2dx=$_____。

解答：$x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2x+C$

$$\int(\arccos x)^2dx=x(\arccos x)^2+\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos xdx$$

$$=x(\arccos x)^2-2\int\arccos xd(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x+2x+C。$$

12．设 $z=z(x,y)$ 由 $e^{xyz}=x^2+y^2+z^2$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$_____。

解答：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xze^{xyz}-2y}{2z-xye^{xyz}}$

$e^{xyz}=x^2+y^2+z^2$ 两边对 y 求偏导，得

$e^{xyz}(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y})=2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xze^{xyz}-2y}{2z-xye^{xyz}}$。

13．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$_____。

解答：$a=0$

由 $|\lambda E-A|=0$，得 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=6$，

因为 A 有三个线性无关的特征向量，所以 A 可以对角化，从而有

$r(6E-A)=1$，

而 $6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是 $a=0$。

文都教育

14．设随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(-\mu,\frac{\sigma^2}{2}),Z\sim N(0,\frac{\sigma^2}{3})$，又 $P\{X<0\}=0.2$，则 $P\{\mu<5X+4Y-3Z<7\mu\}=$ _____。

解答：

令 $U=5X+4Y-3Z$，因为 X,Y,Z 相互独立，所以 U 服从正态分布，

又 $EU=5EX+4EY-3EZ=\mu$，

$DU=25DX+16DY+9DZ=36\sigma^2$，所以 $U\sim N(\mu,36\sigma^2)$，

由 $P\{X<0\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-\frac{\mu}{\sigma}\}=\Phi(-\frac{\mu}{\sigma})=1-\Phi(\frac{\mu}{\sigma})=0.2$，得 $\Phi(\frac{\mu}{\sigma})=0.8$，

于是 $P\{\mu<5X+4Y-3Z<7\mu\}=P\{\mu<U<7\mu\}$

$=P\{0<\frac{U-\mu}{6\sigma}<\frac{\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{\mu}{\sigma})-\Phi(0)=0.8-0.5=0.3$。

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．求极限设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可微，且 $f'(0)=0,f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$。

解答：

由微分中值定理得 $f(x)-f[\ln(1+x)]=f'(\xi)[x-\ln(1+x)]$，其中 $\ln(1+x)<\xi<x$。

又由 $x-\ln(1+x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x},$$

当 $x>0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$，得 $\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{\xi}{x}<1$，

当 $x<0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$，得 $\frac{\ln(1+x)}{x}>\frac{\xi}{x}>1$，

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=1$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=2$。

16．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f'(x)>0$。证明：在 (a,b) 内存在唯一一点 t，使得由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $x=a,y=f(t)$ 所围图形的面积 S_1 是由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(t),x=b$ 所围图形面积 S_2 的三倍。

解答：

$S_1 = \int_a^t [f(t) - f(x)]dx$，

$S_2 = \int_t^b [f(x) - f(t)]dx$，

令 $\varphi(t) = \int_a^t [f(t) - f(x)]dx - 3\int_t^b [f(x) - f(t)]dx$，

显然 $\varphi(t)$ $[a,b]$ 在上连续，在 (a,b) 内可导，注意到 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，于是有

$\varphi(a) = -3\int_a^b [f(x) - f(t)]dt < 0$，$\varphi(b) = \int_a^b [f(t) - f(x)]dx > 0$，

根据零点定理，存在 $t \in (a,b)$，使得

$S_1 = 3S_2$。

$\varphi(t) = (t-a)f(t) - \int_a^t f(x)dx - 3\int_t^b f(x)dx + 3(b-t)f(t)$

$= (t-a)f(t) - \int_a^t f(x)dx + 3\int_b^t f(x)dx + 3(b-t)f(t)$，

因为 $\varphi'(t) = f(t) + (t-a)f'(t) - f(t) + 3f(t) - 3f(t) + 3(b-t)f'(t)$

$= (3b - a - 2t)f'(t) > 0$（$a < t < b$），所以 $\varphi(t)$ 为单调增函数，唯一性得证。

17．若将函数 $f(x) = xn^{-x}$ 的极大值点记为 $a_n (n = 2,3,4,\cdots)$，试求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域。

解答：

令 $f'(x) = (1 - x\ln n)n^{-x} = 0$，得 $x = \frac{1}{\ln n}$。

$f''(x) = (x\ln^2 n - 2\ln n)n^{-x}$，因为 $f''(\frac{1}{\ln n}) = (-\ln n)n^{-\frac{1}{\ln n}} < 0$，

所以唯一驻点 $x = \frac{1}{\ln n}$ 为函数 $f(x)$ 的最大点。

对级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} x^n$，因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$，所以级数的收敛半径为 $R = 1$，

当 $x = -1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛；当 $x = 1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散，故级数的收敛域为 $[-1,1)$。

18．设 $y = f(x,t)$，其中 t 是由 $G(x,y,t) = 0$ 确定的 x, y 的函数，且 $f(x,t), G(x,y,t)$ 可微，

求$\frac{dy}{dx}$。

解答：

由$y=f(x,t)$，得$\frac{dy}{dx}=f_1'+f_2'\frac{dt}{dx}$，

再由$G(x,y,t)=0$，得$G_1'+G_2'\frac{dy}{dx}+G_3'\frac{dt}{dx}=0$，解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_1'G_3'-f_2'G_1'}{G_3'+f_2'G_2'}。$$

19．设曲线L过点$(1,1)$，曲线L上任一点$P(x,y)$处的切线交x轴于点T，且满足$|PT|=|OT|$，求曲线L的方程。

解答：

令曲线L的方程为$L:y=y(x)$，曲线L上过点$P(x,y)$的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)，$$

令$Y=0$得点T的坐标为$\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$，

$$|PT|=\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2}=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+(y')^2}，$$

$$|OT|=\left|x-\frac{y}{y'}\right|，$$

由$|PT|=|OT|$得

$\left(\frac{y}{y'}\right)^2\left[1+(y')^2\right]=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2$，化简得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}\text{或者}\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^2}{2xy}，$$

令$x=uy$，$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，整理得

$$-\frac{2u}{u^2+1}du=\frac{dy}{y}，$$

从而$\frac{1}{u^2+1}=Cy$，即$x^2+y^2=\frac{1}{C}y$，

由初始条件得$C=\frac{1}{2}$，故曲线L的方程为$x^2+y^2=2y$。

20．设A为$m\times n$阶矩阵，令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，而向量组$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（1）证明方程组$AX=\beta$有无穷多个解；

（2）令$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为方程组$AX=\beta$的任一解，证明$x_n=1$。

解答：

（1）因为$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$相关，故$\alpha_1$可由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表示，设

$\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，即$\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+0\alpha_n$，或

$-\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+0\alpha_n=0$

故齐次方程组$AX=0$有非零解$X=(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T$。

又$R(A)=n-1$，故$AX=0$的基础解系为$X=(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T$。

又非齐方程组$AX=\beta$有特解$X=(1,1,\cdots,1)^T$，故$AX=\beta$有无穷多个解。

（2）由（1）得$AX=\beta$的通解为$X=k(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T+(1,1,\cdots,1)^T$，

所以若$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为$AX=\beta$的任意一解，则$x_n=1$。

21．设$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&a-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求$a$及$A^n$。

解答：

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-a&\lambda-1&2-a\\3&0&\lambda-4\end{vmatrix}=0$，得$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，

$E-A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-a&0&2-a\\3&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$，

因为矩阵A有三个线性无关的特征向量，所以A一定可对角化，从而$R(E-A)=1$，

即 $a=0$，故 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$。

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)X=O$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A)X=O$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}$。

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&6\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，两边 n 次幂得

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix},$$

从而

$$A^n=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&6\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&-6\\3&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3+2^{n+1}&0&2-2^{n+1}\\6-6\times2^n&5&6\times2^n-6\\3-3\times2^n&0&2+3\times2^n\end{pmatrix}。$$

22．10 件产品中有 4 件一等品，3 件二等品及 3 件三等品，现不重复抽取 3 件产品，X_i（$i=1,2,3$）表示抽到的第 i 等品的个数。

（1）求 (X_1,X_2) 的联合分布；　（2）$\rho_{X_1X_2}$。

解答：

（1）X_1,X_2 的可能取值都是 $0,1,2,3$，

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120},\quad P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{C_3^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{9}{120},$$

$$P\{X_1=0,X_2=2\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{9}{120},\quad P\{X_1=0,X_2=3\}=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120},$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{C_4^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{12}{120},\quad P\{X_1=1,X_2=1\}=\frac{C_4^1C_3^1C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120},$$

$$P\{X_1=1,X_2=2\}=\frac{C_4^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{12}{120},\quad P\{X_1=1,X_2=3\}=0,$$

$$P\{X_1=2,X_2=0\}=\frac{C_4^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{18}{120},\quad P\{X_1=2,X_2=1\}=\frac{C_4^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{18}{120},$$

$$P\{X_1=2,X_2=2\}=0,\quad P\{X_1=2,X_2=3\}=0,$$

$$P\{X_1=3,X_2=0\}=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120},\quad P\{X_1=3,X_2=1\}=0,$$

$$P\{X_1=3,X_2=2\}=0,\quad P\{X_1=3,X_2=3\}=0。$$

23．设总体 X 的密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases},$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从中抽取的简单随机样本，求参数 θ 的极大似然估计量。

解答：

$$L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}\quad（x_i>0(1\le i\le n)）,$$

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^n\ln x_i-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2,$$

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{2n}{\theta}-2n\ln\theta+\dfrac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i^2=0$，得

$\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}$，则参数 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$。

文都教育