2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（二）

数学二

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．当 $x\to 0+$ 时，下列无穷小中，阶数最高的无穷小量是 （ ）

$(A)\ \ln(1+x^3)-x^3$；$(B)\ \sqrt{1+x^2}+\cos x-2$；$(C)\ \int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$；$(D)\ e^{x^2}-1-x^2$。

解答：(A)

$\ln(1+x^3)-x^3\sim-\dfrac{x^6}{2}$，$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2=\sqrt{1+x^2}-1+\cos x-1\sim-\dfrac{x^4}{12}$，

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+x^2)}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$，得 $\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt\sim\dfrac{x^4}{2}$，故选 (A)。

$e^{x^2}-1-x^2\sim\dfrac{x^4}{2}$，

2．下列命题正确的是 （ ）

(A) 若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续；

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续；

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的一个邻域内连续；

(D) 若 $\lim\limits_{h\to0}[f(a+h)-f(a-h)]=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

解答：(B)

设 $f(x)=\begin{cases}1,x>0\\-1,x\le0\end{cases}$，显然 $|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处连续，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，(A) 不对；

设 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\in Q\\0,x\in R\setminus Q\end{cases}$，显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但对任意的 $x=a\neq0$，$f(x)$ 间断，

(C) 不对；

设 $f(x)=\begin{cases}x^3,x\neq0\\2,x=0\end{cases}$，显然 $\lim\limits_{h\to0}[f(0+h)-f(0-h)]=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 间断，(D) 不对；

文都教育

因为 $0 \le |\,|f(x)| - |f(a)|\,| \le |f(x) - f(a)|$，若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续，即 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，根据夹逼定理，有 $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$，即 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处连续，选 (B)。

3．设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -3$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处　　（　）

(A) 取极大值；　(B) 取极小值；　(C) 不可导；　(D) 可导且 $f'(0) \ne 0$。

解答：(A)

由 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -3$，得 $f(0) = 0$，因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -3 < 0$，所以根据极限的保号性，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x| < \delta$ 时，$\dfrac{f(x)}{x^2} < 0$，从而 $f(x) < f(0) = 0$，即 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大点，选 (A)。

4．设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1 + x^2} \cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 + \cos^4 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$，则有　　（　）

（A）$N < P < M$．（B）$M < P < N$．（C）$N < M < P$．（D）$P < M < N$．

解答：(D)

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + x^2} \cos^4 x dx = 0,$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 + \cos^4 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0,$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx < 0$$，选 (D)。

5．设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上二阶连续可偏导，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > 0 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$，则（　）

(A) $f(x, y)$ 的最大点和最小点都在 D 内；(B) $f(x, y)$ 的最大点和最小点都在 D 的边界上；

(C) $f(x, y)$ 的最小点在 D 内，最大点在 D 的边界上；

(D) $f(x, y)$ 的最大点在 D 内，最小点在 D 的边界上。

解答：(B)

若 $f(x, y)$ 的最大点在 D 内的某点 $M_0(x_0, y_0)$，

文都教育

令 $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}|_{M_0}, A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{M_0}, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{M_0}$，而 $AC-B^2<0$，矛盾，故 $f(x,y)$ 的最大点不可能在区域 D 内部，同理 $f(x,y)$ 的最小点不可能在区域 D 内部，选 (B)。

6．累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$ 等于 （ ）

$(A)\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$； $(B)\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；

$(C)\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$； $(D)\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$。

解答：(D)

积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x, y\ge 0\}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{x-x^2}\}$，

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)dr=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$，选 (D)。

7．若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，且向量 α_4 不可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则下列结论正确的是 （ ）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关； (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关； (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关。

解答：(A)

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩小于 4，又因为 α_4 不可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩小于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩，即向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩小于 3，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，选 (A)。

8．设三阶阵 A 的特征值为 $0,1,-1$，则下列结论中不正确的是 （ ）

(A) 阵 A 是不可逆的； (B) 阵 A 的主对角线上元素之和为零；

(C) 1 与-1 所对应的特征向量正交； (D) $AX=O$ 的基础解系有一个解向量构成。

解答：(C)

因为 $|A|=0\times 1\times(-1)=0$，所以 A 不可逆，又由 A 的三个特征值都是但值，得 A 可以对角化，于是 $r(A)=2$，故方程组 $AX=O$ 的基础解系有一个线性无关的解向量构成，同时 A 的

主对角线上元素之和即为三个特征值之和，由于 A 不一定是实对称矩阵，所以不同特征值对应的特征向量不一定正交，故选 (C)。

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9．设当 $x \to 0$ 时，$k\sin^2 x \sim \sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}$，则 $k =$ _____。

解答：$k = \dfrac{1}{2}$

$k\sin^2 x \sim kx^2$，$\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2} = 2(\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4}} - 1) - 2(\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} - 1)$，

而 $\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4}} - 1 \sim \dfrac{x^2}{8}$，$\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}} - 1 \sim -\dfrac{x^2}{8}$，所以 $\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2} \sim \dfrac{x^2}{2}$，故 $k = \dfrac{1}{2}$。

10．设 $\begin{cases} \tan(xt^2) = x^2 - t + 1 \\ e^{yt} - 2y = 3t + 1 \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ _____。

解答：$\dfrac{[1+2tx\sec^2(xt^2)](te^{yt}-2)}{[2x-t^2\sec^2(xt^2)](3-ye^{yt})}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt}$，

$\tan(xt^2) = x^2 - t + 1$ 两边对 t 求导，得 $(t^2\dfrac{dx}{dt} + 2tx)\sec^2(xt^2) = 2x\dfrac{dx}{dt} - 1$，解得

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1+2tx\sec^2(xt^2)}{2x - t^2\sec^2(xt^2)}$；

$e^{yt} - 2y = 3t + 1$ 两边对 t 求导，得 $e^{yt}(t\dfrac{dy}{dt} + y) - 2\dfrac{dy}{dt} = 3$，解得

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3 - ye^{yt}}{te^{yt} - 2}$，

于是 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{[1+2tx\sec^2(xt^2)](te^{yt}-2)}{[2x-t^2\sec^2(xt^2)](3-ye^{yt})}$。

11．$\int \dfrac{x+1}{(1+x^2)^2} dx =$ _____。

解答：$-\dfrac{1}{2(1+x^2)} + \dfrac{\arctan x}{2} + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + C$

$\int \dfrac{x+1}{(1+x^2)^2} dx = \int \dfrac{x}{(1+x^2)^2} dx + \int \dfrac{1}{(1+x^2)^2} dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) + \int \dfrac{1}{(1+x^2)^2} dx$

文都教育

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\,,$$

而 $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{1}{\sec^4 t}\sec^2 t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C=\frac{\arctan x}{2}+\frac{x}{2(1+x^2)}+C\,,$$

于是 $\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{2}+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$。

12．设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 $f(x)$ 可微，则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____。

解答：$\underline{\dfrac{x+2xyzf'}{1+2yz}}$

由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=y(2x-2z\frac{\partial z}{\partial x})f'$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xyf'-1}{1+2yz}$，

再由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=f+-2yzf'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f}{1+2yz}$，

所以 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2xyzf'}{1+2yz}$。

13．满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的微分方程 $2yy''=1+y'^2$ 的特解为_____。

解答：$\underline{y=\dfrac{x^2}{4}+1}$，

解答：令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程，得

$$2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2\Rightarrow\int\frac{2pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln(1+p^2)=\ln y+\ln C_0\,,$$

把初始条件 $p(1)=0$ 代入，得 $1+y'^2=y\Rightarrow\int\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=\pm\int dx$，

则有 $2\sqrt{y-1}=\pm x+C_1$，把初始条件 $y(0)=1$ 代入，得 $y=\frac{x^2}{4}+1$。

14．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，$R(A)=3$，且 $\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-8\end{pmatrix}$，则方程组 $AX=b$ 的通解为_____。

解答：$k\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}$

因为 $R(A)=3$，所以 $AX=b$ 的通解形式为 $k\xi+\eta$，

其中 $\xi=\alpha_3-\alpha_1=(\alpha_3+\alpha_2)-\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}$，

$\eta=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}$，于是 $AX=b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}$。

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x(e^x-1)}$。

解答：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-(\cos 2x-1)}{x^2},$$

因为 $\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\cos 2x-1\sim-2x^2$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x(e^x-1)}=\dfrac{5}{2}$。

16. 设对一切的 x 有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\le x\le1$ 时，$f(x)=x(x^2-1)$，讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

解答：

当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}f(x+1)=\dfrac{1}{2}(x+1)(x^2+2x)$，

文都教育

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{1}{2}(x+1)(x^2+2x)}{x}=\frac{3}{2},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x(x^2-1)}{x}=-1,$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

17．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f'(x)>0$。证明：在 (a,b) 内存在唯一一点 t，使得由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $x=a, y=f(t)$ 所围图形的面积 S_1 是由曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(t), x=b$ 所围图形面积 S_2 的三倍。

解答：

$S_1=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx$，

$S_2=\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$，

令 $\varphi(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$，

显然 $\varphi(t)$ $[a,b]$ 在上连续，在 (a,b) 内可导，注意到 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，于是有

$\varphi(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(t)]dt<0$，$\varphi(b)=\int_a^b[f(t)-f(x)]dx>0$，

根据零点定理，存在 $t\in(a,b)$，使得

$S_1=3S_2$。

$\varphi(t)=(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)dx-3\int_t^b f(x)dx+3(b-t)f(t)$

$=(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)dx+3\int_b^t f(x)dx+3(b-t)f(t)$，

因为 $\varphi'(t)=f(t)+(t-a)f'(t)-f(t)+3f(t)-3f(t)+3(b-t)f'(t)$

$=(3b-a-2t)f'(t)>0$（$a<t<b$），所以 $\varphi(t)$ 为单调增函数，唯一性得证。

18．证明：当 $x\geq2$ 时，$(1+x)\ln(1+x)>2x-\frac{x^3}{6}$。

解答：

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-2x+\frac{x^3}{6}$，

$f(2)=3\ln 3-4+\frac{4}{3}=3(\ln 3-\frac{8}{9})>0$。

$f'(x)=\ln(1+x)-1+\frac{x^2}{2}$, $f''(x)=\frac{1}{1+x}+x$。

因为当$x\geq 2$时，$f''(x)>0$，所以$f'(x)$在$[2,+\infty)$上严格递增，

从而$x\geq 2$时，$f'(x)\geq f'(2)=\ln 3-1+2=1+\ln 3>0$。

因此当$x\geq 2$时，$f(x)$严格递增。

所以当$x\geq 2$时，$f(x)\geq f(2)>0$，不等式得证。

19．设$f(x)$在区间$[a,b]$上二阶连续可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)。$$

解答：

令$F(x)=\int_a^x f(x)dx$，则$F'(x)=f(x)$，且$F(x)$三阶连续可导，由泰勒公式得

$$F(a)=F(\frac{a+b}{2})+f(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{2!}(a-\frac{a+b}{2})^2$$

$$+\frac{f''(\xi_1)}{3!}(a-\frac{a+b}{2})^3，其中\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})；$$

$$F(b)=F(\frac{a+b}{2})+f(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{2!}(b-\frac{a+b}{2})^2$$

$$+\frac{f''(\xi_2)}{3!}(b-\frac{a+b}{2})^3，其中\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)，$$

两式相减，得

$$F(b)-F(a)=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]，即$$

$$\int_a^b f(x)dx=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]，$$

因为$f''(x)$在$[a,b]$上连续，所以$f''(x)$在$[a,b]$上取到最大值M与最小值m，

则$2m\leq f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\leq 2M$，或$m\leq\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leq M$，

由连续函数介值定理，存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (a,b)$，使得

$\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2} = f''(\xi)$，于是有

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$。

20．设 $u = f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 与 $e^z - xz = 0$ 确定，求 $\frac{du}{dx}$。

解答：

$u = f(x,y,z)$ 两边求微分，得

$du = f_1'dx + f_2'dy + f_3'dz$，

$e^{xy} - y = 0$ 两边求微分，得

$e^{xy}(ydx + xdy) - dy = 0$，解得 $dy = \frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}dx$；

$e^z - xz = 0$ 两边求微分，得

$e^z dz - xdz - zdx = 0$，解得 $dz = \frac{z}{e^z - x}dx$，

于是有 $du = f_1'dx + f_2'dy + f_3'dz = (f_1' + \frac{ye^{xy}f_2'}{1-xe^{xy}} + \frac{zf_3'}{e^z - x})dx$，或

$\frac{du}{dx} = f_1' + \frac{ye^{xy}f_2'}{1-xe^{xy}} + \frac{zf_3'}{e^z - x}$。

21．设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0} = v_0$。已知阻力与速度成正比（比例系数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程。

解答：

设质点的运动速度为 $v = v(t)$，阻力 $F = ma = \frac{dv}{dt}$，根据题意得

$F = -v(t)$，即 $v'(t) + v(t) = 0$，初始条件为 $v(0) = v_0$，解得

$v(t) = v_0 e^{-t}$。

文都教育

令 $v_0e^{-t}=\frac{v_0}{3}$，则 $t=\ln 3$，

路程 $S=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}dt=\frac{2v_0}{3}$。

22．当常数 a 取何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 有无穷多个解，求出其通解。

解答：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a & a+3 & 1 & -2\\1 & a & 1 & a\\1 & 1 & a & a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\\a-1 & 3 & 0 & -2-a\\0 & a-1 & 1-a & a(1-a)\end{pmatrix}.$$

若 $a=1$，则 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 3 & 0 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，原方程组的通解为

$X=k(-1,0,1)^T+(2,-1,0)$（k 为任意常数）；

若 $a\neq 1$，则 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & a & 1 & a\\a-1 & 3 & 0 & -2-a\\0 & 1 & -1 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a+1 & 0 & 0\\a-1 & 2 & -1 & -2\\0 & 1 & -1 & a\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & a+1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & -a\\0 & 1-a^2 & 3 & 2(a-1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a+1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & -a\\0 & 0 & 4-a^2 & -2+3a-a^3\end{pmatrix}。$$

当 $a=2$ 时，方程组无解；

当 $a=-2$ 时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，原方程组的通解为

$X=k(1,1,1)^T+(2,2,0)$（k 为任意常数）。

23. 设二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为标准型 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$，求参数 a,b 及正交矩阵 Q。

解答：

二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵形式为

$$f=X^TAX，$$

文都教育

其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&b\\1&2&1\\b&1&a\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$。

因为 $Q^TAQ=B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，所以 $A\sim B$（因为正交矩阵的转置矩阵即为逆阵），

于是 A 的特征值为 $1,1,4$。

而 $|\lambda E-A|=\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)$，

所以有

$$\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$，

解得 $a=2,b=1$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 得

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-A)X=0$ 得

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

显然 ξ_1,ξ_2,ξ_3 两两正交，单位化为 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

则 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。

文都教育