2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（二）

数学一

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．若 $f(x)$ 连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=e^3$，则有 （ ）

$(A)f'(0)=3$； $(B)f'(0)=1$； $(C)f'(0)=4$； $(D)f'(0)=2$。

解答：(A)

由 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(f(x)+\cos x-1)]^{\frac{1}{f(x)+\cos x-1}}\}^{\frac{f(x)+\cos x-1}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+\cos x-1}{x}}=e^3$，

得 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\cos x-1}{x}=3$，注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，

于是有 $f(0)=0, f'(0)=3$，选 (A)。

2．若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在，则 （ ）

（A）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处必可导；

（B）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导，但必连续；

（C）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定连续，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必存在；

（D）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不一定存在.

解答：(B)

因为 $f'_-(x_0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，于是 $f(x_0-0)=f(x_0)$，

同理由 $f'_+(x_0)$ 存在，得 $f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$，故 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因为 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 不一定相等，所以选 (B)。

3．设 $f(x)$ 在 R 上是以 T 为周期的连续奇函数，则下列函数中不是周期函数的是（ ）

文都教育

$(A)\int_a^x f(t)dt$；　　$(B)\int_{-x}^a f(t)dt$；

$(C)\int_{-x}^0 f(t)dt-\int_x^0 f(t)dt$；　　$(D)\int_{-x}^x tf(t)dt$。

解答：(D)

对 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，由 $F(x+T)=\int_a^{x+T} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+T} f(t)dt$

$=F(x)+\int_0^T f(t)dt=F(x)+\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=F(x)$，得 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为周期函数；

对 $F(x)=\int_{-x}^a f(t)dt$，由 $F(x+T)=\int_{-x-T}^a f(t)dt\overset{t=-u}{=}-\int_{x+T}^{-a} f(u)du$

$=\int_{-a}^{x+T} f(u)du=\int_{-a}^a f(u)du+\int_a^{x+T} f(u)du=\int_a^{x+T} f(u)du=\int_a^x f(u)du=F(x)$，得

$F(x)=\int_{-x}^a f(t)dt$ 为周期函数；

对 $F(x)=\int_{-x}^0 f(t)dt-\int_x^0 f(t)dt$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt\int_0^x f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$，

由 $F(x+T)=\int_{-x-T}^0 f(t)dt-\int_{x+T}^0 f(t)dt=\int_0^{x+T} f(t)dt+\int_0^{x+T} f(t)dt$

$=2\int_0^x f(t)dt+2\int_0^T f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt+2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt=F(x)$，得

$F(x)=\int_{-x}^0 f(t)dt-\int_x^0 f(t)dt$ 为周期函数，选 (D)。

4．二重积分 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^y \sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)dx$ 在极坐标系下的表达式为　　（　）

$(A)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}} r\sin r^2dr$；　　$(B)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$；

$(C)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$；　　$(D)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr$。

解答：(D)

二重积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,x\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$，

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $D=\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq 1\}$，故

$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{y}\sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2 dr$，选$(D)$。

5．设Σ为由直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$绕$x$轴旋转产生的曲面，则$\Sigma$上点$P=(-1,1,-2)$处的法线方程为（　　）.

（A）$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$；　　（B）$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$；

（C）$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$；　　（D）$\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

解答：(D)

令$M(x,y,z)$为所求曲面上一点，$M_0(x,y_0,z_0)$为该点对应的圆与直线的公共点，该点所在圆的圆心为$T(x,0,0)$，由$|MT|=|M_0T|$，得$y^2+z^2=y_0^2+z_0^2$，

注意到$M_0(x,y_0,z_0)$在直线上，所以$\frac{x}{1}=\frac{y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}$，即$y_0=-x,z_0=2x$，

于是所求曲面方程为$\Sigma: y^2+z^2=5x^2$，

则曲面在点$(-1,1,-2)$处的法向量为$\vec{n}=\{-10x,2y,2z\}_{(-1,1,-2)}=\{10,2,-4\}$，

所以法线方程为$\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$，选$(D)$。

6．设阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$经行初等变换为阵$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则（　　）

$(A)\beta_4$不能由β_1,β_2,β_3线性表示；

$(B)\beta_4$能由β_1,β_2,β_3线性表示，但表示法不唯一；

$(C)\beta_4$能由β_1,β_2,β_3线性表示，且表示法唯一；

$(D)\beta_4$能否由β_1,β_2,β_3线性表示不能确定。

解答：(C)

因为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$经过有限次初等行变换化为$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，

所以方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$与方程组$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$同解，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，

所以方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 有唯一解，从而方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$ 也只有唯一解，选 (C)。

7．设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，则与 A 相似的矩阵为　　（　）

$(A)\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$；　　$(B)\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$；

$(C)\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{bmatrix}$；　　$(D)\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$。

解答：(D)

显然 A 为对称矩阵，所给的四个矩阵也为对称矩阵，两对称矩阵相似的充分必要条件是特征值相同，A 的特征值为 1（四重），显然选 (D)。

8．设随机变量 X 的密度为

$f(x)=\begin{cases}Ae^{-2x},x\geq\alpha\\0,x<\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为正常数），则 $P\{\alpha<X<\alpha+\beta\}(\beta>0)$ 的值　（　）

(A) 与 β 无关，随 α 单调增加；　　(B) 与 β 无关，随 α 单调减少；

(C) 与 α 无关，随 β 单调增加；　　(D) 与 α 无关，随 β 单调减少。

解答：(C)

$\int_{\alpha}^{+\infty}Ae^{-2x}dx=1$，得 $A=2e^{2\alpha}$，

$P\{\alpha<X<\alpha+\beta\}=\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}2e^{-2(x-\alpha)}d(x-\alpha)=\int_{0}^{\beta}2e^{-2t}dt=1-e^{-2\beta}$，显然选 (C)。

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$_____。

解答：$\dfrac{1}{2}$

文都教育

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{[x^2-x\ln(1+x)][\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2-x\ln(1+x)},$$

由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，得

$$x^2-x\ln(1+x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2},$$

于是 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}。$$

10．$\int \arcsin^2 x dx=$ _____。

解答：$x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$

$$\int \arcsin^2 x dx=x\arcsin^2 x-\int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\arcsin^2 x+2\int\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C。$$

11．设函数 $u=1-\ln(x^2+y^2+z^2)$ 过点 $M_0=(1,2,-2)$ 的等值面为闭曲面 Σ，Σ 在 $M_0=(1,2,-2)$ 点处的外法向是 $\vec{n}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=$ _____.

解答：$-\frac{2}{3}$

等值面为 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=9$，曲面 Σ 在点 $M_0=(1,2,-2)$ 的外法向量为

$$\vec{n}=\{2x,2y,2z\}_{(1,2,-2)}=\{2,4,-4\},$$

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=-\frac{2}{3}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2},$$

在点 $M_0=(1,2,-2)$ 处的偏导数为 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{M_0}=-\frac{2}{9},\frac{\partial u}{\partial y}|_{M_0}=-\frac{4}{9},\frac{\partial u}{\partial z}|_{M_0}=\frac{4}{9}$，

于是 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0}=-\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\times(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$。

12．满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的微分方程 $2yy''=1+y'^2$ 的特解为_____。

解答：$y=\frac{x^2}{4}+1$

令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程，得

$$2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2\Rightarrow\int\frac{2pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln(1+p^2)=\ln y+\ln C_0,$$

把初始条件 $p(1)=0$ 代入，得 $1+y'^2=y\Rightarrow\int\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=\pm\int dx$，

则有 $2\sqrt{y-1}=\pm x+C_1$，把初始条件 $y(0)=1$ 代入，得 $y=\frac{x^2}{4}+1$。

13．设 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $x=$_____，$y=$_____。

解答：$x=0,y=1$

令 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，由 $A\sim B$，得

$\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}$，即 $\begin{cases}2+x=1+y\\-2=-2y\end{cases}$，解得 $x=0,y=1$。

14．设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则统计量

$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i/\sqrt{\sum_{i=11}^{15}X_i^2}\sim$_____。

解答：$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^iX_i/\sqrt{\sum_{i=11}^{15}X_i^2}\sim t(5)$

文都教育

由 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 独立且与总体分布相同得 $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \sim N(0,10\sigma^2)$，

从而 $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma} \sim N(0,1)$，

又由 $X_{11}, X_2, \cdots, X_{15}$ 独立且与总体分布相等得 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=11}^{15} X_i^2 \sim \chi^2(5)$，

于是 $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma} \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=11}^{15} X_i^2 / 5} \sim t(5)$，即 $\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=11}^{15} X_i^2} \sim t(5)$。

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可微，且 $f'(0)=0, f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$。

解答：

由微分中值定理得 $f(x)-f[\ln(1+x)]=f'(\xi)[x-\ln(1+x)]$，其中 $\ln(1+x)<\xi<x$。

又由 $x-\ln(1+x)=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\sim\dfrac{x^2}{2}$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x},$$

当 $x>0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$，得 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}<\dfrac{\xi}{x}<1$，

当 $x<0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$，得 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}>\dfrac{\xi}{x}>1$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=1$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=2$。

16．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$\int_0^1 f(x)dx=0$，令 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$。

（1）证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)dx=-\xi f(\xi)$；

（2）$\eta\in(0,1)$，使得 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

解答：

（1）$F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$，有因为 $F(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理

可得，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\int_0^{\xi} f(x)dx = -\xi f(\xi)$。

（2）因为 $F'(0)=0, F'(\xi)=0, \xi \in (0,1)$，又因为 $F'(x) \in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理可得，存在 $\eta \in (0,\xi)$，使得 $F''(\eta)=0$, 即 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

17．计算 $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 所围成的第一卦限的部分。

解答：

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} rdr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} d(r^2) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}(\pi-2)。$$

18．设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le 0\}(a>0)$，$\Sigma$ 为几何体 Ω 的外侧边界，计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$。

解答：

令 $\Sigma_1 : z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 取下侧，$\Sigma_2 : z=0$（$x^2+y^2 \le a^2$）取上侧，

$$\oiint_{\Sigma} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} = \iint_{\Sigma_1} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} + \iint_{\Sigma_2} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \iint_{\Sigma_1} axdydz+2(x+a)ydzdx,$$

由 $I = \iint_{\Sigma_1} axdydz+2(x+a)ydzdx = (\oiint_{\Sigma} - \iint_{\Sigma_2})axdydz+2(x+a)ydzdx$

$= \iiint_{\Omega} (3a+2x)dv - 0 = 3a\iiint_{\Omega} dv = 2\pi a^4$，得

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} = \frac{2\pi a^4}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} = 0,$$

文都教育

于是 $\oint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}=\dfrac{2\pi a^4}{\sqrt{1+a^2}}$。

19．设曲线 L 过点 $(1,1)$，曲线 L 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线交 x 轴于点 T，且满足 $|PT|=|OT|$，求曲线 L 的方程。

解答：

令曲线 L 的方程为 $L:y=y(x)$，曲线 L 上过点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

令 $Y=0$ 得点 T 的坐标为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，

$$|PT|=\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2}=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+(y')^2},$$

$$|OT|=\left|x-\frac{y}{y'}\right|,$$

由 $|PT|=|OT|$ 得

$\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2\left[1+(y')^2\right]=\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)^2$，化简得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}\text{ 或者 }\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^2}{2xy},$$

令 $x=uy$，$\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$，整理得

$$-\frac{2u}{u^2+1}du=\frac{dy}{y},$$

从而 $\dfrac{1}{u^2+1}=Cy$，即 $x^2+y^2=\dfrac{1}{C}y$，

由初始条件得 $C=\dfrac{1}{2}$，故曲线 L 的方程为 $x^2+y^2=2y$。

20．设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（1）证明方程组 $AX=\beta$ 有无穷多个解；

文都教育

（2）令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为方程组 $AX=\beta$ 的任一解，证明 $x_n=1$。

解答：

（1）因为 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 相关，故 α_1 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示，设

$\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，即 $\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+0\alpha_n$，或

$-\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+0\alpha_n=0$

故齐次方程组 $AX=0$ 有非零解 $X=(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T$。

又 $R(A)=n-1$，故 $AX=0$ 的基础解系为 $X=(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T$。

又非齐方程组 $AX=\beta$ 有特解 $X=(1,1,\cdots,1)^T$，故 $AX=\beta$ 有无穷多个解。

（2）由（1）得 $AX=\beta$ 的通解为 $X=k(-1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^T+(1,1,\cdots,1)^T$，

所以若 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为 $AX=\beta$ 的任意一解，则 $x_n=1$。

21．设二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面 $v^2+4w^2=4$，求 a,b 及正交变换。

解答：

令 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$，

则 $f=X^TAX$，

因为二次型 $f=X^TAX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $f=v^2+4w^2$，

则 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，

于是 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|\end{cases}$，解得 $a=3,b=1$，于是 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0E-A)X=O$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=1$ 时，由 $(E-A)X=O$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-A)X=O$，得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。

令 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，

则正交变换矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，正交变换为 $X=QY$。

22．设白球和黑球各 4 个，从中任取 4 个放入甲盒，其余的求放入乙盒，然后分别从两个盒子中各取一个球，颜色正好相同，问放入甲盒的 4 个球中有几个白球概率最大？

解答：

设 $A=\{$从甲、乙两盒中各任取一个，颜色正好相同$\}$，$B_i=\{$甲盒中有 i 个白球$\}$。

$$P(B_i)=\frac{C_4^iC_4^{4-i}}{C_8^4},i=0,1,2,3,4,$$

$$P(A\mid B_i)=\begin{cases}\frac{3}{8},i=1\\\frac{4}{8},i=2\\\frac{3}{8},i=3\\0,i=0,4\end{cases},P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}\times\frac{3}{8}+\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}\times\frac{4}{8}+\frac{C_4^3C_4^1}{C_8^4}\times\frac{3}{8},$$

文都教育

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}=\begin{cases}\frac{1}{5}, i=1\\ \frac{3}{5}, i=2\\ \frac{1}{5}, i=3\\ 0, i=0,4\end{cases},$$

故有 2 个白球的概率最大。

23．设总体 X 的密度为 $f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$（$-\infty<x<+\infty$）（$\theta>0$），求参数 θ 的矩估计量与极大似然估计量。

解答：

显然 $EX=0$，

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,\theta)dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2 e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta^2\int_0^{+\infty}(\frac{x}{\theta})^2 e^{-\frac{x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta})=\theta^2\Gamma(3)=2\theta^2,$$

由 $EX^2=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\ 。$$

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|},$$

则 $\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-n\ln(2\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，

由 $\frac{d}{d\theta}\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

则参数 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。

文都教育