2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（一）

数学二

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在，则 （ ）

（A）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处必可导；

（B）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导，但必连续；

（C）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定连续，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在；

（D）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不一定存在.

解答：$\underline{(B)}$

因为 $f'_-(x_0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，于是 $f(x_0-0)=f(x_0)$，

同理由 $f'_+(x_0)$ 存在，得 $f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$，故 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因为 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 不一定相等，所以选 (B)。

2．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则 （ ）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点；

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点。

解答：$\underline{(B)}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，所以根据极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有

$\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$，进而 $f''(x)>0$，而 $f'(0)=0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小点，选 (B)。

3．曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线的条数为 （ ）

(A) 1 条； (B) 2 条； (C) 3 条； (D) 4 条。

解答：(D)

由 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}y=\infty$，得 $x=\pm1$ 为曲线的铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以曲线没有水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y+x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=0$，得曲线有两条斜渐近线，选 (D)。

4．积分 $\int_0^{\pi}x\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}dx$ 为 （ ）

(A) 2π； (B) π； (C) $\dfrac{\pi}{2}$； (D) $\dfrac{\pi}{4}$。

解答：(C)

$$\int_0^{\pi}x\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx=\frac{\pi}{2}$$，选 (C)。

5．在曲线 $y=(x-1)^2$ 上的点 $(2,1)$ 处作曲线的法线，由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域为 $D(y>0)$，则区域 D 绕 x 轴旋转一周所成的几何体的体积为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{5}$； (B) $\dfrac{2\pi}{3}$； (C) $\dfrac{8\pi}{15}$； (D) $\dfrac{13\pi}{15}$。

解答：(D)

曲线 $y=(x-1)^2$ 在点 $(2,1)$ 的法线方程为

$y-1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$，其与 x 轴交点坐标为 $(4,0)$，

则 $V=\pi\int_1^2(x-1)^4dx+\pi\int_2^4(-\dfrac{1}{2}x+2)^2dx=\dfrac{13\pi}{15}$，选 (D)。

6．二重积分 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{y}\sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx$ 在极坐标系下的表达

文都教育

式为 （ ）

$(A)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}r\sin r^2dr$；　　$(B)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1}r\sin r^2dr$；

$(C)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1}r\sin r^2dr$；　　$(D)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1}r\sin r^2dr$。

解答：(D)

二重积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0, x\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$，

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $D=\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq 1\}$，故

$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{y}\sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1}r\sin r^2dr$，选 (D)。

7．设 A,B 是满足 $AB=0$ 的任意两个非零阵，则必有 （ ）

(A) A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

(B) A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关；

(C) A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

(D) A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关。

解答：(A)

设 A,B 分别为 $m\times n$ 与 $n\times s$ 矩阵，因为 A,B 为非零矩阵，所以 $r(A)\geq 1, r(B)\geq 1$，

又因为 $AB=0$，所以 $r(A)+r(B)\leq n$，所以 $r(A)<n$ 且 $r(B)<b$，即 A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关，选 (A)。

8．下列说法正确的是 （ ）

(A) 若矩阵 A 可逆，则 A 一定可对角化；

(B) 设 A 为 n 阶方阵且 $r(A)=r<n$，则 A 经过有限次初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(C) 设 A 为 n 阶方阵且 $r(A)=r<n$，则矩阵 A 的非零特征值的个数与其秩相等；

(D) 若 A 可对角化，则其非零特征值的个数与其秩相等。

文都教育

解答：$\underline{(D)}$

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9．当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\alpha^x-1}\ln[1+\dfrac{f(\alpha x)}{\sin\beta x}]=\beta$，其中常数$\alpha>1,\beta\neq 0$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$_____.

解答：$\underline{\dfrac{\beta^2\ln\alpha}{\alpha^2}}$

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\alpha^x-1}\ln[1+\dfrac{f(\alpha x)}{\sin\beta x}]=\beta$，得

$$\beta=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha^x-1}\ln[1+\frac{f(\alpha x)}{\sin\beta x}]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(\alpha x)}{\sin\beta x}}{x\ln\alpha}=\frac{1}{\beta\ln\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)}{x^2}$$

$$=\frac{\alpha^2}{\beta\ln\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)}{(\alpha x)^2}=\frac{\alpha^2}{\beta\ln\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2},$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{\beta^2\ln\alpha}{\alpha^2}$。

10．$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}+1}+\dfrac{\sqrt{n+2}}{n\sqrt{n}+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}+n}]=$_____。

解答：$\underline{\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$

$x_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}+1}+\dfrac{\sqrt{n+2}}{n\sqrt{n}+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}+n}$，则

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}++\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}})<x_n<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}++\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}++\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)。$$

11．$\int\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx=$_____。

文都教育

解答：$\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln[(x+\frac{1}{2})+\sqrt{x^2+x+1}]+C$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{1+x+x^2}}d(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}d(x+\frac{1}{2})$$

$=\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln[(x+\frac{1}{2})+\sqrt{x^2+x+1}]+C$。

12．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$_____。

解答：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos y-z\sin x}{y\sin z-\cos x}$

$x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$ 两边对 x 对偏导得

$\cos y-y\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\cos x-z\sin x=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos y-z\sin x}{y\sin z-\cos x}$。

13．方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$ 的通解为_____。

解答：$y=x\sin\ln Cx$

由 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$，得 $y'=\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$，

令 $\frac{y}{x}=u$，得 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$，两边积分得

$\arcsin u=\ln x+\ln C$，于是通解为 $y=x\sin\ln Cx$。

14．设 A 为四阶矩阵，$|A^*|=8$，则 $|(\frac{1}{4}A)^{-1}-3A^*|=$_____。

解答：8

因为 $|A^*|=|A|^3$，且 $|A^*|=8$，所以 $|A|=2$，

由 $(\frac{1}{4}A)^{-1}-3A^*=4A^{-1}-3|A|A^{-1}=-2A^{-1}$，得

$|(\frac{1}{4}A)^{-1}-3A^*|=|-2A^{-1}|=(-2)^4|A^{-1}|=16\times\frac{1}{2}=8$。

文都教育

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}, x\neq 0,1\\ 0, x=0, x=1\end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型。

解答：

当 $x=0, x=1$ 时，$f(x)$ 间断，

因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{1-e}\neq f(0)=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

因为 $f(1-0)=0, f(1+0)=1$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

16．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$\int_0^1 f(x)dx=0$，令 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$。

（1）证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)dx=-\xi f(\xi)$；

（2）$\eta\in(0,1)$，使得 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

解答：

（1）$F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$，有因为 $F(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\int_0^\xi f(x)dx=-\xi f(\xi)$。

（2）因为 $F'(0)=0, F'(\xi)=0, \xi\in(0,1)$，又因为 $F'(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理可得，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $F''(\eta)=0$，即 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

17．证明：当 $x\geq 2$ 时，$(1+x)\ln(1+x)>2x-\dfrac{x^3}{6}$。

解答：

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-2x+\dfrac{x^3}{6}$，

$f(2)=3\ln 3-4+\dfrac{4}{3}=3(\ln 3-\dfrac{8}{9})>0$。

$f'(x)=\ln(1+x)-1+\dfrac{x^2}{2}, f''(x)=\dfrac{1}{1+x}+x$。

因为当 $x\geq 2$ 时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上严格递增，

从而 $x\geq 2$ 时，$f'(x)\geq f'(2)=\ln 3-1+2=1+\ln 3>0$。

因此当 $x\geq 2$ 时，$f(x)$ 严格递增。

文都教育

所以当 $x \geq 2$ 时， $f(x) \geq f(2) > 0$，不等式得证。

18．计算 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$。

解答：

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{(x+1)e^x - e^x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{e^x}{1+x}dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+x}dx + \int e^x d(\frac{1}{1+x}) = \int \frac{e^x}{1+x}dx + \frac{e^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{1+x}dx = \frac{e^x}{1+x} + C。$$

19．计算 $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 所围成的第一卦限的部分。

解答：

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}d(r^2) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}(\pi-2)。$$

20．设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$。

解答：

由 $z=xf(x+y)$，得 $\frac{dz}{dx} = f(x+y) + xf'(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$，

再由 $F(x,y,z)=0$，得 $F_1' + F_2'\frac{dy}{dx} + F_3'\frac{dz}{dx} = 0$，解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_3'(f+xf') + F_1'}{xf'F_3' + F_2'}, \frac{dz}{dx} = \frac{F_2'(f+xf') - xf'F_1'}{xf'F_3' + F_2'}。$$

21．试求微分方程 $x\frac{dy}{dx} = 2y - x$ 的一个解 $y=y(x)$，使由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1, x=2$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积最小。

解答：

文都教育

由方程 $x\dfrac{dy}{dx}=2y-x$，得通解为 $y=x+Cx^2$。

由 $y=x+Cx^2$ 与直线 $x=1,x=2$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

$V(C)=\pi\int_1^2(x+Cx^2)^2dx=\pi(\dfrac{31}{5}C^2+\dfrac{15}{2}C+\dfrac{7}{3})$。

由 $V'(C)=\pi(\dfrac{62}{5}C+\dfrac{15}{2})=0$，得唯一驻点 $C=-\dfrac{75}{124}$。

由实际问题可得 $V(C)$ 最小值一定存在，而驻点唯一，故该点即为最小点，从而所求的微分方程为 $y=x-\dfrac{75}{124}x^2$。

22．讨论 a,b 的取值，使得非齐线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2-x_3=1\\x_1-x_2+x_3=b\\2x_1+2x_2+bx_3=2\end{cases}$ 无解、有唯一解，有无穷多个解，在有无穷多个解时，求出其通解。

解答：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\1&-1&1&b\\2&2&b&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\a+1&0&0&b+1\\2-2a&0&b+2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\2(1-a)&0&b+2&0\\a+1&0&0&b+1\end{array}\right]。$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&b+2&2(-a)&0\\0&0&a+1&b+1\end{array}\right]=B$$

（1）当 $a\neq-1,b\neq-2$ 时，方程组有唯一解；

（2）当 $a=-1,b\neq-1$ 时，因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$，所以方程组无解；

（3）当 $a=-1,b=-1$ 时，方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=1\\4x_1+x_3=0\end{cases},$$

其通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$（其中 k 为任意常数）；

（4）当 $b=-2,a\neq1$ 时，$A\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&0&2(1-a)&0\\0&0&a+1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&0&2(1-a)&0\\0&0&0&-1\end{array}\right]$，

文都教育

因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$，所以方程组无解；

（5）当 $b=-2,a=1$ 时，方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_1=-1\end{cases}$，

其通解为

$$k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 0\end{pmatrix}。)$$

23．设 A 为三阶阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量。若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=-\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$。

（1）求阵 A 的特征向量；（2）设 $B=2A^*-E$，求 $|B|$。

解答：

（1）$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，

于是 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，即 $A\sim\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}=C$，

则 A 与 C 有相同的特征值，

由 $|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=-5,\lambda_2=\lambda_3=1$，

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=-5,\lambda_2=\lambda_3=1$。

（2）$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-5$，$A^*$ 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}=1,\frac{|A|}{\lambda_2}=-5,\frac{|A|}{\lambda_3}=-5$，

于是 $B=2A^*-E$ 的特征值为 $1,-11,-11$，故 $|B|=-121$。

文都教育