2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（一）

数学三

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．设 $f(x)$ 为连续函数，常数 $a>0$，则下列命题正确的是　　（　）

(A) 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为奇函数；

(B) 设 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数；

(C) 设 $f(x)$ 为以 T 为周期的函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 也是以 T 为周期的函数；

(D) 设 $f(x)$ 为严格单调增加的函数，则 $f'(x)\geq 0$。

解答：$\underline{(B)}$

设 $f(x)$ 为奇函数，令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，

由 $F(-x)=\int_a^{-x} f(t)dt \overset{t=-u}{=} \int_{-a}^{x} f(-u)(-du)=\int_a^x f(u)du$

$=\int_{-a}^{a} f(u)du+\int_a^x f(u)du=\int_a^x f(u)du=F(x)$，得 $\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数选 (B)。

2．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则　　（　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点；

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点。

解答：$\underline{(B)}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，所以根据极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有

$\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$，进而 $f''(x)>0$，而 $f'(0)=0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小点，选 (B)。

文都教育

3．在曲线 $y=(x-1)^2$ 上的点 $(2,1)$ 处作曲线的法线，由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域为 $D(y>0)$，则区域 D 绕 x 轴旋转一周所成的几何体的体积为 （ ）

$(A)\ \frac{\pi}{5}$；　$(B)\ \frac{2\pi}{3}$；　$(C)\ \frac{8\pi}{15}$；　$(D)\ \frac{13\pi}{15}$。

解答：(D)

曲线 $y=(x-1)^2$ 在点 $(2,1)$ 的法线方程为

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+2$，其与 x 轴交点坐标为 $(4,0)$，

则 $V=\pi\int_1^2(x-1)^4dx+\pi\int_2^4(-\frac{1}{2}x+2)^2dx=\frac{13\pi}{15}$，选 (D)。

4．二重积分 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^y\sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx$ 在极坐标系下的表达式为 （ ）

$(A)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}r\sin r^2dr$；　$(B)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r\sin r^2dr$；

$(C)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r\sin r^2dr$；　$(D)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r\sin r^2dr$。

解答：(D)

二重积分区域为 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,x\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$，

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $D=\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq 1\}$，故

$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^y\sin(x^2+y^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r\sin r^2dr$，选 (D)。

5．下列结论正确的是 （ ）

(A) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$；

(B) 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，则必有 $u_{n+1}\leq u_n$；

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(D) 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n<v_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

解答：(C)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，取 $\varepsilon=1$，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$|\frac{u_n}{v_n}-0|<1$，即 $0<u_n<v_n$。

若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=N+1}^{\infty}v_n$ 收敛，根据正项级数比较审敛法，$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛，于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，选 (C)。

6．设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，$ABX=O$ 与 $BX=O$ 是同解方程组的充分条件是（　）

$(A)\ r(B)=n$；　$(B)\ r(B)=s$；　$(C)\ r(A)=m$；　$(D)\ r(A)=s$。

解答：(D)

若 $r(A)=s$，的方程组 $AX=O$ 只有零解，所以若 $ABX=O$，则一定有 $BX=O$，显然方程组 $BX=O$ 的解为方程组 $ABX=O$ 的解，即两个方程组同解；反之，若两个方程组同解，则 $r(AB)=r(B)$，从而 $r(A)=s$，选 (D)。

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　）

(A) 合同且相似；(B) 合同但不相似；　(C) 相似但不合同；　(D) 不合同也不相似。

解答：(B)

显然 A,B 都是实对称矩阵，A 的特征值为 $0,1,2$，B 的特征值为 $0,1,3$，故两个矩阵合同但不相似，选 (B)。

8．设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，则下列随机变量中服从参数为 2λ 的指数分布的是（　　）

$(A)X+Y$；　$(B)X-Y$；　$(C)\max(X,Y)$；　$(D)\min(X,Y)$。

解答：(D)

X 与 Y 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$，

令 $Z=\min(X,Y)$，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}$

$=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$

$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-e^{-2\lambda}$，

即 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$，即 Z 服从参数为 2λ 的指数分布，选 (D)

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}=$ _____。

解答：$\underline{e^{\frac{4}{3}}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\arctan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\arctan x-x}}\right]^{\frac{\arctan x-x}{x}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}$，

因为 $x\ln(1+x)-e^{x^2}+1=x[x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)]-(1+x^2+o(x^3))+1\sim-\dfrac{1}{2}x^3$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{\ln(1+2x)}{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}}=e^{\frac{4}{3}}$。

10. 设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 $f(x)$ 可微，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____。

解答：$\underline{\dfrac{x+2xyzf'}{1+2yz}}$

文都教育

由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $1+\frac{\partial z}{\partial x}=y(2x-2z\frac{\partial z}{\partial x})f'$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xyf'-1}{1+2yz}$，

再由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=f+-2yzf'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f}{1+2yz}$，

所以 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2xyzf'}{1+2yz}$。

11．满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的微分方程 $2yy''=1+y'^2$ 的特解为_____。

解答：$y=\frac{x^2}{4}+1$

解答：令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程，得

$$2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2\Rightarrow\int\frac{2pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln(1+p^2)=\ln y+\ln C_0,$$

把初始条件 $p(1)=0$ 代入，得 $1+y'^2=y\Rightarrow\int\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=\pm\int dx$，

则有 $2\sqrt{y-1}=\pm x+C_1$，把初始条件 $y(0)=1$ 代入，得 $y=\frac{x^2}{4}+1$。

12．设 D 是由 $y=x$ 及 $y^2=x$ 围成的区域，则 $\iint_D\frac{\sin y}{y}dxdy=$_____。

解答：$1-\sin 1$

$$\iint_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1dy\int_{y^2}^y\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin ydy=\int_0^1\sin ydy-\int_0^1y\sin ydy$$

$$=1-\cos1+\int_0^1yd(\cos y)=1-\sin1。$$

13．设 A 是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，且 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，则 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-A^*|=$_____。

解答：54

文都教育

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆，于是有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}，\text{即 } A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}，\ |A| = -4，$$

$$(\frac{1}{2}A)^{-1} - A^* = 2A^{-1} - |A|A^{-1} = 2A^{-1} + 4A^{-1} = 6A^{-1},$$

于是 $|(\frac{1}{2}A)^{-1} - A^*| = 6^3 |A^{-1}| = 54$。

14．设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则统计量

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=11}^{15} X_i^2} \sim _____。$$

解答：$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=11}^{15} X_i^2} \sim t(5)$

由 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 独立且与总体分布相同得 $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \sim N(0, 10\sigma^2)$，

从而 $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma} \sim N(0,1)$，

又由 $X_{11}, X_2, \cdots, X_{15}$ 独立且与总体分布相等得 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=11}^{15} X_i^2 \sim \chi^2(5)$，

于是 $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma} \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=11}^{15} X_i^2 / 5} \sim t(5)$，即 $\sqrt{2}\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=11}^{15} X_i^2} \sim t(5)$。

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$\int_0^1 f(x)dx = 0$，令 $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$。

（1）证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$；

（2）$\eta \in (0,1)$，使得 $2f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$。

解答：

文都教育

（1）$F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$, 有因为 $F(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\int_0^{\xi} f(x)dx=-\xi f(\xi)$。

（2）因为 $F'(0)=0, F'(\xi)=0, \xi\in(0,1)$，又因为 $F'(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可微，由罗尔定理可得，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $F''(\eta)=0$, 即 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$。

16．计算二重积分计算 $\iint_D (x^2+y)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 2x$。

解答：

由对称性，得 $\iint_D (x^2+y)dxdy=\iint_D x^2dxdy$，

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则

$$\iint_D x^2dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\cos^2\theta dr$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=8I_6=8\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}。$$

17．设产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{d-p}{e}$，其中 C 为成本，q 为需求量，p 为价格，a,b,c,e 来自总皆为正常数且 $d>b$，求

（1）利润最大时的产量及最大利润；

（2）需求对价格的弹性；

（3）需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量。

解答：

（1）利润函数为

$$L=qp-C=(d-eq)q-(aq^2+bq+c)=(d-b)q-(e+a)q^2-c,$$

令 $\frac{d}{dq}L=(d-b)-2(e+a)q=0$ 得 $q=\frac{d-b}{2(e-a)}$，

因为 $\frac{d^2}{dq^2}L=-2(e+a)<0$，所以当 $q=\frac{d-b}{2(e-a)}$ 时利润最大，

且最大利润为 $L=\frac{(d-b)^2}{4(e+a)}-c$。

（2）因为 $q'=\frac{1}{e}$，所以需求对价格的弹性为

$$\eta = -\frac{p}{q}q' = \frac{d-eq}{eq}。$$

（3）当$|\eta|=1$时，$q=\frac{d}{2e}$。

18．设$z=f(x^2+y^2,xy,x)$，其中$f(u,v,w)$二阶连续可偏导，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解答：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'+f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(2yf_{21}''+xf_{22}'')+2yf_{31}''+xf_{22}''$$

$$=4xyf_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+f_2'+x(y+1)f_{22}''+2yf_{31}''。$$

19．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!+1)x^n}{(n+1)!}$的收敛区域与和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{2^{n+1}(n+1)!}$的和。

解答：

由$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!+1]}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n!+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+1}{(n+2)(n!+1)}=1$，得级数的收敛半径为

$R=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!+1)}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$发散，

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!+1)(-1)^n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$收敛，所以级数的收敛域为$[-1,1)$。

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!+1)x^n}{(n+1)!}$，则$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$，

当$x=0$时，$S(0)=0$，

当$x\neq 0$时，$S(x)=\frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!})=\frac{1}{x}(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$，

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\ln(1-x)-x(-1\le x<1)$，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x=e^x-1-x，$$

所以 $S(x)=\begin{cases}0, x=0\\ \dfrac{1}{x}[-\ln(1-x)-2x+e^{x}-1], -1\le x<1 且 x\neq 0\end{cases}$，

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!+1}{2^{n+1}(n+1)!}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!+1}{(n+1)!}(\dfrac{1}{2})^{n}=\dfrac{1}{2}S(\dfrac{1}{2})=2(\ln 2+e^{\frac{1}{2}}-2)$。

20．讨论 a,b 的取值，使得非齐线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2-x_3=1\\ x_1-x_2+x_3=b\\ 2x_1+2x_2+bx_3=2\end{cases}$ 无解、有唯一解，有无穷多个解，在有无穷多个解时，求出其通解。

解答：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\1&-1&1&b\\2&2&b&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\a+1&0&0&b+1\\2-2a&0&b+2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}a&1&-1&1\\2(1-a)&0&b+2&0\\a+1&0&0&b+1\end{array}\right]。$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&b+2&2(-a)&0\\0&0&a+1&b+1\end{array}\right]=B$$

（1）当 $a\neq -1, b\neq -2$ 时，方程组有唯一解；

（2）当 $a=-1, b\neq -1$ 时，因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$，所以方程组无解；

（3）当 $a=-1, b=-1$ 时，方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=1\\ 4x_1+x_3=0\end{cases},$$

其通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$（其中 k 为任意常数）；

（4）当 $b=-2, a\neq 1$ 时，$A\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&0&2(1-a)&0\\0&0&a+1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&-1&a&1\\0&0&2(1-a)&0\\0&0&0&-1\end{array}\right]$，

因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$，所以方程组无解；

（5）当 $b=-2, a=1$ 时，方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_1=-1\end{cases}$，

文都教育

其通解为

$$k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}。)$$

21．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为1，$(0,1,-1)^T$ 为二次型的矩阵的特征向量。

（1）求常数 a,b；

（2）求正交变换 $X=QY$，使得二次型化为标准型；

（3）判断曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为何种曲面。

解答：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$，由 $R(A)=1$ 得 $a=b$。

$$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&1\\0&1-a^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\pm1。$$

又 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}a-1=0\\1-b=\lambda\\b-1=-\lambda\end{cases}\Rightarrow a=b=1,\lambda=0$。

（2）$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 0，0，3。

$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $Q=\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 及 $X=QY$，则有 $f=3y_3^2$。

文都教育

（3）$3y_3^2=1$ 表示两个平行的平面。

22．设 X,Y 的概率分布为 $X\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}, Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，且 $P\{XY=0\}=1$，

（1）求 (X,Y) 的联合分布；　（2） X,Y 是否独立？

解答：

（1）因为 $P\{X_1X_2=0\}=1$，所以 $P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0$，

$$P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4}, P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=0, P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2},$$

（联合分布律表格）

（2）因为 $P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4}$，所以 X,Y 不相互独立。

23．设某元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x>\theta\\ 0, x\le\theta\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数。又设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观察值，求参数 θ 的最大似然估计值。

解答：

参数 θ 的似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x_i>\theta(1\le i\le\theta)\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

当 $x_i>\theta(1\le i\le\theta)$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$，

因为 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=2n>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 随 θ 的增加而增加，因为 $\theta<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以参数 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}。$$

文都教育