2010 年全国硕士研究生入学统一考试模拟试卷（一）

数学一

一、选择题（1~8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在题后的括号内）

1．下列命题正确的是 （ ）

(A) 若$|f(x)|$在$x=a$处连续，则$f(x)$在$x=a$处连续；

(B) 若$f(x)$在$x=a$处连续，则$|f(x)|$在$x=a$处连续；

(C) 若$f(x)$在$x=a$处连续，则$f(x)$在$x=a$的一个邻域内连续；

(D) 若$\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a-h)]=0$，则$f(x)$在$x=a$处连续。

解答：$\underline{(B)}$

设$f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x\le 0\end{cases}$，显然$|f(x)|=1$在$x=0$处连续，但$f(x)$在$x=0$处间断，$(A)$不对；

设$f(x)=\begin{cases}x^2, x\in Q\\ 0, x\in R\setminus Q\end{cases}$，显然$f(x)$在$x=0$处连续，但对任意的$x=a\neq 0$，$f(x)$间断，$(C)$不对；

设$f(x)=\begin{cases}x^3, x\neq 0\\ 2, x=0\end{cases}$，显然$\lim\limits_{h\to 0}[f(0+h)-f(0-h)]=0$，但$f(x)$在$x=0$间断，$(D)$不对；

因为$0\le||f(x)|-|f(a)||\le|f(x)-f(a)|$，若$f(x)$在$x=a$处连续，即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，根据夹逼定理，有$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$，即$|f(x)|$在$x=a$处连续，选$(B)$。

2．设$f(x)$二阶连续可导，令$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$，当$x\to 0$时，$F'(x)\sim x^2$，则$f''(0)$等于 （ ）

(A) 1； (B) 0； (C) $\frac{1}{2}$； (D) ∞。

解答：$\underline{(C)}$

$F(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$，$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt$，

因为 $F'(x)\sim x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{x^2}=1$，

于是 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f'(t)dt}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=2f''(0)$，即 $f''(0)=\dfrac{1}{2}$，选 (C)。

3．设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-3$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　　（　）

(A) 取极大值；　　(B) 取极小值；　　(C) 不可导；　　(D) 可导且 $f'(0)\neq 0$。

解答：(A)

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-3$，得 $f(0)=0$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-3<0$，所以根据极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $\dfrac{f(x)}{x^2}<0$，注意到 $x^2>0$，则有 $f(x)<0=f(0)$，于是 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，选 (A)。

4．方程 $\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt=0$ 根的个数为　　（　）

(A)0 个；　　(B)1 个；　　(C)2 个；　　(D)3 个．

解答：(B)

设 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt$，

则 $F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0, F(\dfrac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}dt>0$。由零点定理，$F(x)=0$ 至少一个根。

因为 $F'(x)=\sqrt{1+x^4}+e^{-\cos^2 x}\sin x>0, x\in R$，所以原方程仅有一个根，选 (B)。

5．下列结论正确的是　　（　）

(A) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$；

(B) 若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，则必有 $u_{n+1}\le u_n$；

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(D) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n<v_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

解答：(C)

文都教育

对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，取$\varepsilon=1$，则存在$N>0$，当$n>N$时，有

$|\frac{u_n}{v_n}-0|<1$，即$0<u_n<v_n$。

若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=N+1}^{\infty}v_n$收敛，根据正项级数比较审敛法，$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n$收敛，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，选(C)。

6．设A为$m\times n$阶阵，B为$n\times m$阶阵，方程组$(AB)X=0$，则　　（　）

(A)当$n>m$时，方程组仅有零解；　　(B)当$n>m$时，必有非零解；

(C) $m>n$时，仅有零解；　　(D)当$m>n$时，必有非零解。

解答：(B)

因为$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$，且$r(A)\le\min\{m,n\}$，$r(B)\le\min\{m,n\}$，

所以$r(AB)\le\min\{m,n\}$

若$n>m$，则$r(AB)\le m<n$，于是方程组$(AB)X=0$有非零解，选(B)。

7．设A为三阶矩阵，λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，α_1,α_2是A的属于特征值λ_1的线性无关的特征向量，α_3是A的属于特征值λ_2的特征向量，则向量组$\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$线性相关的必要条件是　　（　）

(A) $\lambda_1=0$或者$\lambda_1\lambda_2=1$；　　(B) $\lambda_1\neq0$且$\lambda_1\lambda_2\neq1$；

(C) $\lambda_2=0$或者$\lambda_1\lambda_2=1$；　　(D) $\lambda_2\neq0$且$\lambda_1\lambda_2\neq1$。

解答：(A)

$\alpha_1+A\alpha_3=\alpha_1+\lambda_2\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)=\lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_3$，$A\alpha_1+\alpha_3=\lambda_1\alpha_1+\alpha_3$，

$$(\alpha_1+A\alpha_3,A(\alpha_2-\alpha_3),A\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{pmatrix},$$

向量组$\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$线性相关的充分必要条件是

$r(\alpha_1+A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3)<3$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，于是向量组 $\alpha_1+A\alpha_3$，$A(\alpha_2-\alpha_3)$，$A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的充分必要条件是矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{pmatrix}$ 不可逆，即 $\begin{vmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{vmatrix}=0$，于是 $\lambda_1=0$ 或者 $\lambda_1\lambda_2=1$，选 (A)。

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，则下列随机变量中服从参数为 2λ 的指数分布的是 （ ）

$(A)X+Y$； $(B)X-Y$； $(C)\max(X,Y)$； $(D)\min(X,Y)$。

解答：(D)

X 与 Y 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\0, x\le 0\end{cases}$，

令 $Z=\min(X,Y)$，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}$

$=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$

$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-e^{-2\lambda}$，

即 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z}, z>0\\0, z\le 0\end{cases}$，即 Z 服从参数为 2λ 的指数分布，选 (D)

二、填空题（9~14 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题后的横线上）

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=$ _____。

解答：2

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\dfrac{1-x^{x-1}}{1-x+\ln x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(x-1)\ln x}-1}{1-x+\ln x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$，

因为当 $x\to 1$ 时，$\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1$，所以 $(x-1)\ln x\sim(x-1)^2$，

文都教育

又 $\ln x=\ln[1+(x-1)]=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)$，

故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{-\dfrac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)}=2$。

10．$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=$_____。

解答：$2\arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int\sqrt{4-x^2}\,dx+4\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=-2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C。$$

11．设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 $f(x)$ 可微，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____。

解答：$\dfrac{x+2xyzf'}{1+2yz}$

由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(2x-2z\dfrac{\partial z}{\partial x})f'$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xyf'-1}{1+2yz}$，

再由 $x+z=yf(x^2-z^2)$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f+-2yzf'\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f}{1+2yz}$，

所以 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2xyzf'}{1+2yz}$。

12．微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$ 的通解为_____。

解答：$\dfrac{\arctan x+C}{x}$

由 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$，得

$$y=[\int\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{\arctan x+C}{x}。$$

13．设 A 是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，且 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，则 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-A^*|=$ _____。

解答：54

$$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，于是有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}，\text{即 } A\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}，|A|=-4，$$

$$(\frac{1}{2}A)^{-1}-A^*=2A^{-1}-|A|A^{-1}=2A^{-1}+4A^{-1}=6A^{-1},$$

于是 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-A^*|=6^3|A^{-1}|=54$。

14．设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，且两个总体相互独立，从总体 X 和 Y 中分别取容量为 m 和 n 的样本，则 $D(S_1^2+S_2^2)=$ _____。

解答：$2\sigma^4(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1})$

因为总体 X 与 Y 相互独立，所以 S_1^2 与 S_2^2 相互独立，

由 $\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，$\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，得

$$D[\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}]=2(m-1),D[\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}]=2(n-1),$$

于是 $DS_1^2=\frac{2\sigma^4}{m-1},DS_2^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}$，故 $D(S_1^2+S_2^2)=2\sigma^4(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1})$。

三、解答题（15~23 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤）

15．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)=0$ 且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个不同的实根。

解答：

文都教育

不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$，

由 $f'_+(a)>0$，存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(a)=0$；

由 $f'_-(b)>0$，存在 $x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_2)<f(b)=0$。

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x_1)f(x_2)<0$，所以存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$，

由 $f(x)$ 可导且 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=0, f'(\xi_2)=0$，命题得证。

16．设 $z(x,y)=\int_0^1 f(t)|xy-t|dt, f(t)\in C[0,1]$，且 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解答：

由 $z(x,y)=\int_0^{xy} f(t)(xy-t)dt+\int_{xy}^1 f(t)(t-xy)dt$

$=xy\int_0^{xy} f(t)dt-\int_0^{xy} tf(t)dt+\int_{xy}^1 tf(t)dt-xy\int_{xy}^1 f(t)dt$

$=xy\int_0^{xy} f(t)dt-\int_0^{xy} tf(t)dt-\int_1^{xy} tf(t)dt+xy\int_1^{xy} f(t)dt$，

得 $\frac{\partial z}{\partial x}=y\int_0^{xy} f(t)dt+y\int_1^{xy} f(t)dt$，

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2 f(xy)$ 。

17．计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，$\Sigma$ 是由 $x^2+y^2\le R^2, -R\le z\le R$ 所确定的立体表面的外侧。

解答：

记 S_1, S_2, S_3 分别表示下底、上底和圆柱面，则由对称性知

$$\iint_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0,$$

$$\iint_{S_1}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=-\iint_{S_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow\iint_{S_1+S_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0\Rightarrow\iint_{S_1+S_2}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$$

在 S_3 上，$\iint_{S_3}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$。

记 S_3 在 yoz 上的投影为 $D_{yz}: -R\le y\le R, -R\le z\le R$，于是

$$\iint_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz=4\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}dy\int_0^R\frac{dz}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R,$$

所以 $\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R$。

18．若将函数 $f(x)=xn^{-x}$ 的极大值点记为 $a_n(n=2,3,4,\cdots)$，试求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域。

解答：

令 $f'(x)=(1-x\ln n)n^{-x}=0$，得 $x=\frac{1}{\ln n}$。

$f''(x)=(x\ln^2 n-2\ln n)n^{-x}$，因为 $f''(\frac{1}{\ln n})=(-\ln n)n^{-\frac{1}{\ln n}}<0$，

所以唯一驻点 $x=\frac{1}{\ln n}$ 为函数 $f(x)$ 的最大点。

对级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}x^n$，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，所以级数的收敛半径为 $R=1$，

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，故级数的收敛域为 $[-1,1)$。

19．飞机以匀速 v 沿 y 轴正向飞行，当飞机行到原点时被发现，随即从 x 轴上点 (x_0,y_0) 处发射导弹向飞机击去，其中 $x_0>0$。若导弹的速度方向始终指向飞机，其速度大小为常数 $2v$。（1）求导弹运行轨迹满足的微分方程及初始条件；（2）求导弹的运行轨迹方程及导弹自发射到击中目标所需的时间 T。

解答：

（1）设导弹在 t 时刻的坐标为 $A(x(t),y(t))$，其运行轨迹方程为 $y=y(x)$。

在某时刻 $t\geq 0$，飞机的位置为 $B(0,vt)$，因为导弹的速度方向始终指向飞机，从而在 t 时刻，导弹运行轨迹曲线的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 与线段 AB 的斜率相等，于是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{vt-y}{0-x}，\text{即 } x\frac{dy}{dx}=y-vt。$$

两边对 x 求导数，得 $x\frac{d^2y}{dx^2}=-v\frac{dt}{dx}$。　　（*）

因为导弹的速度大小为 $2v$，所以

$$2v=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=-\frac{dx}{dt}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2v}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\text{。}$$

把上式代入（*），可得

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\text{。}$$

$y=y(x)$ 所满足的初始条件为 $y(x_0)=0, y'(x_0)=0$。

（2）令 $\frac{dy}{dx}=p$，则上式方程可变为

$$\begin{cases}x\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\\ p(x_0)=0\end{cases}\Rightarrow\ln(p+\sqrt{1+p^2})+\ln\sqrt{\frac{x_0}{x}}=0\text{，}$$

所以 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=p=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{\frac{x_0}{x}})\\ y(x_0)=0\end{cases}$。

解得导弹运行的轨迹方程为

$$y=y(x)=\frac{2}{3}x_0+\frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{xx_0}\text{。}$$

当导弹击中飞机时 $x=0$，代入上式，得 $y(0)=\frac{2}{3}x_0$。

令 $vT-y(0)=0\Rightarrow T=\frac{2x_0}{3v}$。

20．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$，问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解，有解时求出全部解。

解答：

令 $X=(X_1,X_2,X_3),\ B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，方程组 $AX=B$ 等价于 $\begin{cases}AX_1=\beta_1\\AX_2=\beta_2\\AX_3=\beta_3\end{cases}$。

则 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A\vdots B)$，

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

文都教育

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&-\frac{a-1}{2}&b-2&\frac{c}{2}+1\end{pmatrix}。$$

由 $R(A)=R(A\vdots B)$ 得 $a=1,b=2,c=-2$，

此时 $(A\vdots B)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$AX_1=\beta_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-k_1\\1\end{pmatrix}$，

$AX_2=\beta_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_2\\2-k_2\\1\end{pmatrix}$，

$AX_3=\beta_3$ 的通解为 $X_3=k_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_3\\-1-k_3\\1\end{pmatrix}$，

则 $X=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}1-k_1&2-k_2&1-k_3\\-k_1&2-k_2&-1-k_3\\1&1&1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数。

21．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为1，$(0,1,-1)^T$ 为二次型的矩阵的特征向量。

（1）求常数 a,b；

（2）求正交变换 $X=QY$，使得二次型化为标准型；

（3）判断曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为何种曲面。

解答：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$，由 $R(A)=1$ 得 $a=b$。

文都教育

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1-a^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\pm1。$$

又$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$,得$\begin{cases}a-1=0\\ 1-b=\lambda\\ b-1=-\lambda\end{cases}\Rightarrow a=b=1,\lambda=0$。

（2）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$的特征值为 0，0，3。

$\lambda=0$ 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$；$\lambda=3$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，

令$Q=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$及 $X=QY$，则有 $f=3y_3^2$。

（3）$3y_3^2=1$表示两个平行的平面。

22．设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{k}{2}xe^{-x(1+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求（1）系数k；

（2）问 X 与Y 是否相互独立？为什么？

（3）求EX，DX．

解答：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=1\Rightarrow k=2$；

（2）$\varphi(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$关于 x,y 的边缘概率密度分别为

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\varphi_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2}, & y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

文都教育

当 $x>0, y>0$ 时 $\varphi(x, y) \neq \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$，所以不相互独立.

（3）$EX=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$，$EX^2=\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2$，

$DX=EX^2-(EX)^2=1$.

23．设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leq\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

解答：

参数 θ 的似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x_i>\theta(1\leq i\leq\theta),\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>\theta(1\leq i\leq\theta)$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$，

因为 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=2n>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 随 θ 的增加而增加，因为 $\theta<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以参数 θ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

文都教育