

## 线性代数部分

题型一：行列式的性质

1. 设  $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  为四维列向量,  $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ,  $B = (\beta, \gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3)$ ,  $|A| = 3$ ,

$|B| = 21$ , 求  $|A+B|$ 。

解答:

$$A+B = (\alpha + \beta, 2\gamma_1, 4\gamma_2, 2\gamma_3),$$

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha + \beta, 2\gamma_1, 4\gamma_2, 2\gamma_3| = |\alpha, 2\gamma_1, 4\gamma_2, 2\gamma_3| + |\beta, 2\gamma_1, 4\gamma_2, 2\gamma_3| \\ &= 16|\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| + \frac{16}{3}|\beta, \gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3| = 16 \times 3 + \frac{16}{3} \times 21 = 160. \end{aligned}$$

2. 设  $A, B$  都是三阶矩阵,  $A$  相似于  $B$ , 且  $|E-A| = |E-2A| = |E-3A| = 0$ , 求  $|B^{-1} + 2E|$ 。

解答:

由  $|E-A| = |E-2A| = |E-3A| = 0$ , 得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$ ,

因为  $A \sim B$ , 所以  $B$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$ ,  $B^{-1}$  的特征值为  $1, 2, 3$ , 于是

$B^{-1} + 2E$  的特征值为  $3, 4, 5$ , 故  $|B^{-1} + 2E| = 60$ 。

3. 设  $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ , (1) 计算  $D$ ; (2) 求  $M_{31} + M_{33} + M_{34}$ 。

解答:

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times A_{13} = M_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 9.$$

$$(2) M_{31} + M_{33} + M_{34} = 1 \times A_{31} + 0 \times A_{32} + 1 \times A_{33} + (-1) \times A_{34}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times A_{31} = M_{31}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ -6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \times A_{12} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -63。$$

4. 设  $A, B$  为三阶矩阵, 且  $A \sim B$ , 且  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  为  $A$  的两个特征值,  $|B| = 2$ , 求

$$\begin{vmatrix} (A+E)^{-1} & O \\ O & (2B)^* \end{vmatrix}。$$

解答:

因为  $A \sim B$ , 所以  $A, B$  特征值相同, 设另一特征值为  $\lambda_3$ ,

由  $|B| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 2$  得  $\lambda_3 = 1$ 。

$A+E$  的特征值为  $2, 3, 2$ ,  $(A+E)^{-1}$  的特征值为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ , 则  $|(A+E)^{-1}| = \frac{1}{12}$ 。

因为  $B$  的特征值为  $1, 2, 1$ , 所以  $B^*$  的特征值为  $\frac{|B|}{1}, \frac{|B|}{2}, \frac{|B|}{1}$ , 即为  $2, 1, 2$ ,

于是  $|B^*| = 4$ ,  $|(2B)^*| = |4B^*| = 4^3 |B^*| = 256$ ,

$$\text{故 } \begin{vmatrix} (A+E)^{-1} & O \\ O & (2B)^* \end{vmatrix} = |(A+E)^{-1}| |(2B)^*| = \frac{1}{12} \times 256 = \frac{64}{3}。$$

题型二: 求矩阵方程

1. 设  $A, B$  都是三阶矩阵,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , 且满足  $(A^*)^{-1}B = ABA + 2A^2$ , 求  $B$ 。

解答:

$$|A| = -3, (A^*)^{-1} = (|A| A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A = -\frac{1}{3} A,$$

由  $(A^*)^{-1}B = ABA + 2A^2$ , 得  $-\frac{1}{3}AB = ABA + 2A^2$ , 注意到  $A$  可逆, 则

$$-\frac{1}{3}B = BA + 2A, \text{ 解得 } B = \text{????????}$$

题型三: 矩阵的秩

1. 设  $A$  为  $n \times m$  阵,  $B$  是  $m \times n$  阵, 且  $AB = E$ , 证明  $r(B) = n$ 。

解答:

由  $AB = E$ , 得  $r(AB) = n$ , 因为  $r(AB) \leq r(B)$ , 所以  $r(B) \geq n$ ,

又因为  $r(B) \leq \min\{m, n\} \leq n$ , 所以  $r(B) = n$ 。

2. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 证明:  $r(A) = 1$  的充分必要条件是存在  $n$  维非零列向量  $\alpha, \beta$ , 使得

$$A = \alpha\beta^T.$$

解答:

设  $r(A) = 1$ , 则  $A$  是非零矩阵且任意两行都成比例, 故

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

于是  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$ , 令  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , 故  $A = \alpha\beta^T$ , 显然  $\alpha, \beta$  为非零向量。

设  $A = \alpha\beta^T$ , 其中  $\alpha, \beta$  为非零向量, 则  $A$  为非零矩阵, 于是  $r(A) \geq 1$ ,

又  $r(A) = r(\alpha\beta^T) \leq r(\alpha) = 1$ , 故  $r(A) = 1$ 。

题型四: 向量组的线性相关性

1. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  线性相关, 但任意两个向量线性无关, 求参数  $t$ 。

解答:

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  线性相关的充分必要条件是  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & t-1 \\ t+2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ,

解得  $t = -5$  或  $t = 1$ , 当  $t = 1$  时,  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 显然任意两个向量不成

比例, 故线性无关; 当  $t = -5$  时,  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 显然任意两个向量

也不成比例, 故  $t = -5$  或  $t = 1$ 。

2. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 证明  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$  线性无关。

解答:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

因为  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (3-1)(3-2)(2-1) = 2 \neq 0$ , 所以  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  可逆, 再由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无

关, 所以  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$  线性无关。

题型五: 向量组的线性表示

1. 设向量  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 但向量  $\beta, \gamma, \delta$  线性相关, 证明:  $\delta$  可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示。

解答:

因为  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 所以  $\beta, \gamma$  线性无关, 又因为  $\beta, \gamma, \delta$  线性相关, 所以  $\delta$  可由  $\beta, \gamma$  线性表示, 于是  $\delta$  可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示。

2. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求出可由两组向量同时表示的向量。

解答:

$$\text{令 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0,$$

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } \gamma = k\alpha_1 - 3k\alpha_2 = -k\beta_1 + 0\beta_2.$$

题型六: 方程组解的结构

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是四元非齐线性方程组  $AX = b$  的三个解向量,  $R(A) = 3$ , 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \text{求方程组 } AX = b \text{ 的通解。}$$

解答:

因为  $R(A) = 3$ , 所以方程组  $AX = b$  的通解形式为  $k\xi + \eta$ ,

$$\text{其中 } \xi = \alpha_3 - \alpha_1 = (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \text{特解 } \eta = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以原方程组的通解为 } X = k \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $A$  的各行元素之和为 0 且  $R(A) = n-1$ , 则方程组  $AX = 0$  的通解为

\_\_\_\_\_。

解答:

$k(1, 1, \dots, 1)^T$ , 其中  $k$  为任意常数。

3. 设  $A$  是  $m \times n$  阶矩阵, 则下列命题正确的是

[      ]

(A) 若  $m < n$ , 则方程组  $AX = b$  一定有无穷多个解;

(B) 若  $m > n$ , 则方程组  $AX = b$  一定有唯一解;

(C) 若  $R(A) = n$ , 则方程组  $AX = b$  一定有唯一解;

(D) 若  $R(A) = m$ , 则方程组  $AX = b$  一定有解。

解答: 选 (D)

因为当  $R(A) = m$  时, 一定有  $R(A) = R(\bar{A}) = m$ , 所以方程组  $AX = b$  一定有解。

题型七: 含参数的方程组的解的讨论

$$1. \text{ 讨论 } \begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = b \\ 2x_1 + 2x_2 + bx_3 = 2 \end{cases} \text{ 的解的情况, 在方程组有解时求出其解, 其中 } a, b \text{ 为常数。}$$

解答:

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 2 & 2 & b & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & b+1 \\ 2-2a & 0 & b+2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 2(1-a) & 0 & b+2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & b+2 & 2(-a) & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b+1 \end{array} \right] = B$$

(1) 当  $a \neq -1, b \neq -2$  时, 方程组有唯一解;

(2) 当  $a = -1, b \neq -1$  时, 因为  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , 所以方程组无解;

(3) 当  $a = -1, b = -1$  时, 方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_3 = 0 \end{cases},$$

其通解为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数});$$

(4) 当  $b = -2, a \neq 1$  时,  $A \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2(1-a) & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2(1-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right],$

因为  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , 所以方程组无解;

(5) 当  $b = -2, a = 1$  时, 方程组的同解方程组为  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 = -1 \end{cases},$

其通解为

$$k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

题型八: 求特征值与特征向量并讨论矩阵的可对角化

1.  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 若  $A$  有特征值  $\lambda_0$ , 则  $(A^*)^2 + 3A^* + 2E$  有特征值 \_\_\_\_\_。

解答:  $(\frac{|A|}{\lambda_0})^2 + 3\frac{|A|}{\lambda_0} + 2$ 。

2. 设  $A$  是 3 阶实对称阵,  $R(A)=1, A^2-3A=O$ , 设  $(1,1,-1)^T$  为  $A$  的非零特征值对应的特征向量。(1) 求  $A$  的特征值; (2) 求矩阵  $A$ 。

解答:

(1)  $A^2-3A=O \Rightarrow |A||3E-A|=0 \Rightarrow \lambda=0,3$ , 因为  $R(A)=1$ , 所以  $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=0$ 。

(2) 设特征值 0 对应的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $x_1+x_2-x_3=0$ , 则 0 对应的特征向

量为  $\alpha_2=(-1,1,0)^T, \alpha_3=(1,0,1)^T$ , 令  $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ,

$A=P\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ 。????????

3. 设三阶矩阵  $A$  的特征值为  $-1,1,2$ , 其对应的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 令  $P=(3\alpha_2, -\alpha_3, 2\alpha_1)$ , 则  $P^{-1}AP$  等于

(A)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; (B)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; (C)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; (D)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 。

解答: (C)

4. 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $A^2+A-6E=O$ , 证明  $A$  可对角化。

解答:

由  $A^2+A-6E=O$ , 得  $(2E-A)(3E+A)=O$ , 于是  $r(2E-A)+r(3E+A) \leq n$ ;

又  $r(2E-A)+r(3E+A) \geq r[(2E-A)+(3E+A)] = r(5E) = n$ ,

则  $r(2E-A)+r(3E+A) = n$ 。

(1) 当  $r(2E-A)=0$  时,  $A=2E$ ;

(2) 当  $r(3E+A)=0$  时,  $A=-3E$ ;

(3) 当  $r(2E-A) > 0$  且  $r(3E+A) > 0$  时, 因为  $r(2E-A)+r(3E+A) = n$ ,

所以  $r(2E-A) < n$  且  $r(3E+A) < n$ , 从而  $|2E-A|=|3E+A|=0$ , 即  $2, -3$  为矩阵  $A$  的特

征值, 矩阵  $A$  的属于特征值 2 的线性无关的特征向量的个数为  $n-r(2E-A)$ ; 矩阵  $A$  的属

于特征值  $-3$  的线性无关的特征向量的个数为  $n - r(3E + A)$ ,

因为  $n - r(2E - A) + n - r(3E + A) = n$ , 所以矩阵  $A$  可对角化。

5. 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵, 且存在自然数  $k$ , 使得  $A^k = O$ , 证明:  $A$  不可以对角化。

解答:

方法一

令  $AX = \lambda X$  ( $X \neq O$ ), 则有  $A^k X = \lambda^k X$ , 因为  $A^k = O$ , 所以  $\lambda^k X = O$ , 注意到  $X \neq O$ ,

故  $\lambda^k = 0$ , 从而  $\lambda = 0$ , 即矩阵  $A$  只有特征值  $0$ 。

因为  $R(OE - A) = R(A) \geq 1$ , 所以方程组  $(OE - A)X = O$  的基础解系至多含  $n - 1$  个线性无关的解向量, 故矩阵  $A$  不可对角化。

方法二

设矩阵  $A$  可以对角化, 即存在可逆阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

两边  $k$  次幂得

$$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = O,$$

从而有  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ,

于是  $P^{-1}AP = O$ , 进一步得  $A = O$ , 矛盾, 所以矩阵  $A$  不可以对角化。

题型九: 二次型的标准型

1. 三元二次型  $f = X^T AX$  经过正交变换化为标准型  $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ , 且  $A^* + 2E$  非零

特征值对应的特征向量为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求此二次型。

解答:

因为  $f = X^T AX$  经过正交变换后的标准型为  $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ , 所以矩阵  $A$  的特征值为

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ 。由  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$  得  $A^*$  的特征值为  $\mu_1 = \mu_2 = -2, \mu_3 = 1$ , 从而

$A^* + 2E$  的特征值为  $0, 0, 3$ , 即  $\alpha_1$  为  $A^* + 2E$  的属于特征值 3 的特征向量, 故也为  $A$  的属于特征值  $\lambda_3 = -2$  的特征向量。

令  $A$  的数值特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  的特征向量为  $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , 因为  $A$  为实对称矩阵, 所以有

$$\alpha_1^T \alpha = 0, \text{ 即 } x_1 + x_3 = 0,$$

故矩阵  $A$  的属于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  的特征向量为

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令  $P = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 由  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ , 得

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 所求的二次型为}$$

$$f = X^T AX = -\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 3x_1x_3.$$

2. 设二次型  $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$  经过正交变换  $X = QY$  化为标准型  $f = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$ , 求参数  $a, b$  及正交矩阵  $Q$ 。

解答:

二次型  $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2x_2x_3$  的矩阵形式为

$$f = X^T AX,$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

因为  $Q^T A Q = B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ , 所以  $A \sim B$  (因为正交矩阵的转置矩阵即为逆阵),

于是  $A$  的特征值为  $1, 1, 4$ 。

$$\text{而 } |\lambda E - A| = \lambda^3 - (a+4)\lambda^2 + (4a - b^2 + 2)\lambda + (-3a - 2b + 2b^2 + 2),$$

所以有

$$\lambda^3 - (a+4)\lambda^2 + (4a - b^2 + 2)\lambda + (-3a - 2b + 2b^2 + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4),$$

解得  $a = 2, b = 1$ 。

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  时, 由  $(E - A)X = 0$  得

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

当  $\lambda_3 = 4$  时, 由  $(4E - A)X = 0$  得

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

显然  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  两两正交, 单位化为  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\text{则 } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

题型十：正定二次型的判断与证明

1. 设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵,  $B$  为  $n$  阶可逆矩阵, 证明:  $B^T A B$  是正定矩阵

解答:

因为  $(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B$ , 所以  $B^T A B$  为实对称矩阵,

对任意的  $X \neq O$ ,  $X^T (B^T A B) X = (B X)^T A (B X)$ ,

因为  $B$  可逆, 所以方程组  $B X = O$  只有零解, 若  $X \neq O$ , 则  $B X \neq O$ ,

令  $B X = Y \neq O$ , 因为  $A$  正定, 所以  $X^T (B^T A B) X = (B X)^T A (B X) > 0$ ,

即二次型  $X^T (B^T A B) X$  为正定二次型, 故  $B^T A B$  为正定矩阵。