

概率统计部分

题型一：事件之间的概率运算

1. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$, 求事件 A, B, C 全不发生的概率。

解答：

事件 A, B, C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{ABC}) &= P(\overline{A+B+C}) = 1 - P(A+B+C) \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC), \end{aligned}$$

因为 $ABC \subset AB$ 及 $P(AB) = 0$, 所以 $P(ABC) = 0$,

$$\text{于是 } P(\overline{ABC}) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

2. 设事件 A, B 相互独立, 且 A, B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生与 A 不发生 B 发生的概率相等, 求 $P(A)$ 。

解答：

因为 A, B 相互独立, 所以 $P(AB) = P(A)P(B)$,

又因为 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}\overline{B})$, 且 $P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB)$, $P(\overline{A}\overline{B}) = P(A) - P(AB)$,

所以 $P(A) = P(B)$,

$$\text{又由 } P(\overline{AB}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - 2P(A) + P^2(A) = \frac{1}{9},$$

$$\text{得 } P(A) = \frac{2}{3}.$$

题型二：古典概型

1. 一批产品共 15 件, 其中有 3 件是次品, 从中任取两件, 采取不放回的方式逐个抽取, 求第 2 次取到次品的概率。

解答：

令 $A = \{\text{第一次取到正品}\}$, 则 $\overline{A} = \{\text{第一次取到次品}\}$, 再令 $B = \{\text{第二次取到次品}\}$,

$$P(A) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, P(\overline{A}) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{14} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{14} = \frac{1}{5}.$$

2. 10 件产品中 4 件为次品, 6 件为正品, 现抽取 2 件产品, 求下列事件的概率:

(1) 求第一件为正品, 第二件为次品的概率;

- (2) 在第一件为正品的情况下，求第二件为次品的概率；
 (3) 逐个抽取，求第二件为次品的概率。

解答：

(1) 令 $A_i = \{\text{第}i\text{次取到正品}\} (i=1,2)$

$$\Rightarrow P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15};$$

$$(2) P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{4}{9};$$

$$(3) P(A_2) = P(A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) \\ = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{6}{10}.$$

题型三：全概率公式与贝叶斯公式

1. 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机取出一个地区，再从中抽取两份报名表。

- (1) 求先抽到的一份报名表是女生表的概率 p ；
 (2) 设后抽到的一份报名表为男生的报名表，求先抽到的报名表为女生报名表的概率 q 。

解答：

(1) 设 $A_i = \{\text{所抽取的报名表为第}i\text{个地区的}\} (i=1,2,3)$,

$B_j = \{\text{第}j\text{次取的报名表为男生报名表}\} (j=1,2)$, 则

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(\bar{B}_1 | A_1) = \frac{3}{10}, \quad P(\bar{B}_1 | A_2) = \frac{8}{15}, \quad P(\bar{B}_1 | A_3) = \frac{5}{25},$$

$$P(\bar{B}_1) = P(A_1)P(\bar{B}_1 | A_1) + P(A_2)P(\bar{B}_1 | A_2) + P(A_3)P(\bar{B}_1 | A_3) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{25} = \frac{29}{90}.$$

$$(2) P(\bar{B}_1 B_2 | A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}, \quad P(\bar{B}_1 B_2 | A_2) = \frac{8}{15} \times \frac{7}{14} = \frac{8}{30}, \\ P(\bar{B}_1 B_2 | A_3) = \frac{5}{25} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{30}, \quad P(B_2) = P(B_1) = \frac{61}{90}, \quad \text{则}$$

$$P(\bar{B}_1 | B_2) = \frac{P(\bar{B}_1 B_2)}{P(B_2)} = \frac{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(\bar{B}_1 B_2 | A_i)}{P(B_2)} = \frac{20}{61}.$$

2. 甲、乙两人对同一目标射击，命中目标概率分别为 0.6 和 0.5，下列两种情形，分别求事件“已知目标命中，求是甲命中”的概率。

- (1) 在甲、乙两人中随机挑选一人，由他射击一次；
 (2) 甲、乙两人各自各射击一次。

解答：

(1) 设 $A = \{\text{甲击中目标}\}$, $B = \{\text{乙击中目标}\}$, $C = \{\text{击中目标}\}$, 则 $C = A + B$,

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.8。$$

(2) 设 $A_1 = \{\text{选中甲}\}$, $A_2 = \{\text{选中乙}\}$, $B = \{\text{目标被击中}\}$, 则

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B|A_1) = 0.6, P(B|A_2) = 0.5,$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.6}{0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.5} = \frac{6}{11}。$$

题型四：一维随机变量的分布

1. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ ($a > 0, A$ 为常数), 则

$P\{a < X < a+b\}$ 的值

(A) 与 b 无关, 且随 a 的增加而增加;

(B) 与 b 无关, 且随 a 的增加而减少;

(C) 与 a 无关, 且随 b 的增加而增加;

(D) 与 a 无关, 且随 b 的增加而减少。

解答: (C)

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 所以 $\int_a^{+\infty} Ae^{-x}dx = 1$, 解得 $A = e^a$ 。

$$\text{由 } P\{a < X < a+b\} = \int_a^{a+b} f(x)dx = \int_a^{a+b} e^a e^{-x} dx$$

$= -e^a e^{-x} \Big|_a^{a+b} = 1 - e^{-b}$, 得 $P\{a < X < a+b\}$ 与 a 无关, 且随 b 的增加而增加, 正确答案为

(C)。

2. 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) 求 $F(x)$; (2) $P\{-2 < X < \frac{1}{4}\}$ 。

解答:

$$(1) F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

当 $x < -1$ 时, $F(x) = 0$;

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-1}^x (1+t)dt = \frac{(x+1)^2}{2}$;

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x (1-t)dt = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$;

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) = 1$ 。

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

(2) $P\{-2 < X < \frac{1}{4}\} = F(\frac{1}{4} - 0) - F(-2) = \frac{11}{32}$ 。

题型五：一维随机变量函数的分布

1. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 则 $Y = 2X$ 的密度为

$f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X \leq y\} = P\{X \leq \frac{y}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f_X(x)dx,$$

$$\text{则 } f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi(1+\frac{y^2}{4})} = \frac{2}{\pi(4+y^2)}.$$

2. 设随机变量 $X \sim E(\frac{1}{5}), Y = \min\{X, 2\}$, 求 Y 的分布函数。

解答:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min(X, 2) \leq y\} = 1 - P\{\min(X, 2) > y\}$$

$$= 1 - P\{X > y, 2 > y\} = 1 - P\{X > y\}P\{2 > y\};$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$;

$$\text{当 } y < 2 \text{ 时, } F_Y(y) = 1 - P\{X > y\} = P\{X \leq y\} = F_X(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{5}y}, & 0 < y < 2, \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{5}y}, & 0 < y < 2 \\ 0, & y \leq 0 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}.$$

题型六：二维随机变量的联合分布与边缘分布

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y) = \begin{cases} axe^{-x(y+1)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) 求常数 a ；(2) 求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘密度函数。

解答：

(1) $1 = a \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dy = a \Rightarrow a = 1$ 。

(2) 当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = 0$,

当 $x > 0$ 时, $f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dy = e^{-x}$;

当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$,

当 $y > 0$ 时, $f_Y(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{(y+1)^2}$ 。

题型七：条件分布与随机变量的独立性

1. 设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) X, Y 是否独立, 说明理由; (2) X, Y 是否不相关, 说明理由; (3) 求 $Z = X + Y$ 的密度。

解答：

(1) $0 < x < 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 12y^2 dy = 4x^3$, 则

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 同理 } f_Y(y) = \begin{cases} 12y^2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因为当 $0 < y < x < 1$ 时, $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X, Y 不独立。

(2) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}, EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy = \int_0^1 12y^3(1-y) dy = \frac{3}{5},$

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^x 12xy^3 dy = \frac{1}{2},$$

因为 $\text{cov}(X, Y) = EXY - EXEY = \frac{1}{50}$, 所以 X, Y 相关。

$$(3) f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx,$$

当 $z < 0$ 或 $z \geq 2$ 时, $f_Z(z) = 0$;

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{\frac{z}{2}}^z 12(z-x)^2 dx = \frac{z^3}{2},$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{\frac{z}{2}}^1 12(z-x)^2 dx = \frac{z^3}{2} - 4(z-1)^3, \text{ 所以有}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ 或者 } z \geq 2 \\ \frac{z^3}{2}, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{z^3}{2} - 4(z-1)^3, & 1 \leq z < 2 \end{cases}.$$

2. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 $Y \sim U(0, x)$, 求 (1)

(X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x, y)$; (3) 求 (X, Y) 关于 Y 的边缘密度函数;

(3) 求概率 $P\{X + Y > 1\}$ 。

解答:

$$(1) \text{ 因为 } X \sim U(0,1), \text{ 所以 } f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

又在 $X = x (0 < x < 1)$ 下, $Y \sim U(0, x)$,

$$\text{所以 } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 故}$$

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$(2) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx,$$

当 $y \leq 0$ 或 $y \geq 1$ 时, $f_Y(y) = 0$;

$$\text{当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{yx}^1 \frac{1}{x} dx = \ln \frac{1}{y},$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \ln \frac{1}{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$(3) P\{X+Y > 1\} = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1.$$

题型八：二维随机变量函数的分布

1. 设随机变量 $X \sim E(\lambda) (\lambda > 0)$ ，则 $Y = \max(X, 1)$ 的分布函数 []

(A) 连续； (B) 至少两个间断点； (C) 恰好一个间断点； (D) 可导函数。

解答：(C)

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\max(X, 1) \leq y\} = P\{X \leq y, 1 \leq y\} = P\{X \leq y\}P\{1 \leq y\},$$

当 $y < 1$ 时， $F_Y(y) = 0$ ；

当 $y \geq 1$ 时， $F_Y(y) = P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\lambda y}$ ，

于是 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & y \geq 1 \end{cases}$ ，显然 $F_Y(y)$ 在 $y=1$ 处间断，选(C)。

2. 设随机变量 $X \sim U(0,1), Y \sim E(1)$ ，且 X, Y 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解答：

$$X \sim U(0,1), Y \sim E(1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}.$$

因为 X, Y 相互独立，所以 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，

$$\text{于是 } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy,$$

当 $z \leq 0$ 时， $F_Z(z) = 0$ ；

$$\text{当 } 0 < z < 1 \text{ 时， } F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = z + e^{-z} - 1;$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时， } F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = e^{-z} - e^{1-z} + 1,$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z + e^{-z} - 1, & 0 < z < 1, \\ e^{-z} - e^{1-z} + 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{于是 } f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1. \\ (e-1)e^{-z}, & z \geq 1 \end{cases}$$

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$; (2) 设 $Z = X + Y$, 求 Z 的概率密度函数。

解答:

$$(1) P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2-x-y) dx = \frac{7}{24}.$$

$$(2) F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_0^z dy \int_0^{z-y} (2-x-y) dx = z^2 - \frac{z^3}{3};$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (2-x-y) dx = 1 - \frac{(2-z)^3}{3};$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$ 。

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

题型九: 随机变量的数字特征

1. 设试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$, 失败的概率为 $\frac{1}{4}$, 独立重复试验直到成功两次为止。求试验次数的数学期望。

解答:

设试验的次数为 X , 则 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = C_{k-1}^1 \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \times \frac{3}{4} = (k-1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}, k = 2, 3, \dots.$$

$$EX = \sum_{n=2}^{\infty} n \times (n-1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \frac{9}{16} \sum_{n=2}^{\infty} n \times (n-1) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2},$$

$$\text{令 } S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \times (n-1)x^{n-2} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)',$$

$$\text{所以 } EX = \sum_{n=2}^{\infty} n \times (n-1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \frac{9}{16} S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3}.$$

2. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, \frac{1}{2}), Y \sim N(0, \frac{1}{2}), Z = |X - Y|$, 求 EZ, DZ 。

解答:

令 $U = X - Y$, 因为 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, \frac{1}{2}), Y \sim N(0, \frac{1}{2})$,

$$\text{所以 } U \sim N(0, 1) \Rightarrow f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, -\infty < u < +\infty.$$

$$\Rightarrow EZ = E|U| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$EZ^2 = EU^2 = DU + (EU)^2 = 1 \Rightarrow DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

3. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{m+n} ($m < n$) 独立同分布, 其方差为 σ^2 , 令

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i, Z = \sum_{k=1}^n X_{m+k}.$$

求 (1) DY, DZ ; (2) ρ_{YZ} 。

解答:

(1) 因为 X_1, X_2, \dots, X_{m+n} 相互独立,

$$\text{所以 } DY = \sum_{i=1}^n DX_i = n\sigma^2, \quad DZ = \sum_{k=1}^n DX_{m+k} = n\sigma^2.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{cov}(Y, Z) &= \text{cov}[(X_1 + \dots + X_m) + (X_{m+1} + \dots + X_n), X_{m+1} + \dots + X_{m+n}] \\ &= \text{cov}(X_1 + \dots + X_m, X_{m+1} + \dots + X_{m+n}) + \text{cov}(X_{m+1} + \dots + X_n, X_{m+1} + \dots + X_{m+n}) \\ &= D(X_{m+1} + \dots + X_n) + \text{cov}(X_{m+1} + \dots + X_n, X_{n+1} + \dots + X_{m+n}) \\ &= (n-m)\sigma^2, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \rho_{YZ} = \frac{\text{cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \cdot \sqrt{DZ}} = \frac{n-m}{n}.$$

题型十：中心极限定理的近似计算

1. 一电路使用某种电阻一只，另外 35 只备用，若一只损坏，立即使用另一只更换，直到用完所有备用电阻为止。设电阻使用寿命服从参数为 $\lambda = 0.01$ 的指数分布，用 X 表示 36 只电阻的使用总寿命，用中心极限定理估计 $P\{X > 4200\}$ (附: $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772$)

解答:

设第 i 只电阻使用寿命为 X_i ,

则 $X_i \sim E(0.01)$, $EX_i = 100, DX_i = 100^2$ ($1 \leq i \leq 36$)。

$$X = \sum_{i=1}^{36} X_i,$$

$$P\{X > 4200\} = 1 - P\{X \leq 4200\} = 1 - P\left\{\frac{X - 36 \times 100}{\sqrt{36 \times 100}} \leq \frac{4200 - 3600}{\sqrt{36 \times 100}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(1) = 0.1587.$$

题型十一：车比雪夫不等式与统计量的分布

1. 若随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立同分布于 $N(\mu, 2^2)$, 则根据切比雪夫不等式得

$$P\{|\bar{X} - \mu| \geq 2\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$$

解答:

$$P\{|\bar{X} - \mu| \geq 2\} \leq \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n}.$$

2. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{20} 是总体 X 的简单样本, 求统计量

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} X_i^2}}$$
 所服从的分布。

解答:

因为 X_1, X_2, \dots, X_{10} 相互独立且与总体服从同样的分布,

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i \sim N(0, 10\sigma^2), \text{ 于是 } \frac{\sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma} \sim N(0, 1),$$

又因为 $X_{11}, X_2, \dots, X_{20}$ 相互独立且与总体服从同样的分布,

所以 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1) (i=11,12,\dots,20)$, 于是 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=11}^{20} X_i^2 \sim \chi^2(10)$, 又 $\frac{\sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma}$ 与

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=11}^{20} X_i^2 \text{ 独立, 故 } \frac{\frac{\sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i}{\sqrt{10}\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=11}^{20} X_i^2 / 10}} \sim t(10), \text{ 即 } U = \frac{\sum_{i=1}^{10} (-1)^i X_i}{\sqrt{\sum_{i=11}^{20} X_i^2}} \sim t(10).$$

3. 设总体 $X \sim N(0,2^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{30} 为总体 X 的简单随机样本, 求统计量

$$U = \frac{1}{2} \frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{20}^2)}{(X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{30}^2)} \text{ 所服从的分布.}$$

解答:

由 X_1, X_2, \dots, X_{20} 相互独立且与总体分布相同, 得 $\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{20}^2) \sim \chi^2(20)$,

再由 $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{30}$ 相互独立且与总体分布相同, 得 $\frac{1}{4}(X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{30}^2) \sim \chi^2(10)$,

且 $\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{20}^2)$ 与 $\frac{1}{4}(X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{30}^2)$ 相互独立,

$$\text{则 } \frac{\frac{1}{4}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{20}^2)/20}{\frac{1}{4}(X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{30}^2)/10} \sim F(20,10),$$

$$\text{即 } U = \frac{1}{2} \frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{20}^2)}{(X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{30}^2)} \sim F(20,10).$$

4. 设 $X \sim t(3)$, 求 $\frac{1}{X^2}$ 所服从的分布.

解答:

因为 $X \sim t(3)$, 所以 $X = \frac{U}{\sqrt{V/3}}$, 其中 $U \sim N(0,1), V \sim \chi^2(3)$ 且 U, V 相互独立,

$$X^2 = \frac{U^2}{V/3}, \quad \frac{1}{X^2} = \frac{V/3}{U^2/1} \sim F(3,1), \text{ 其中 } U^2 \sim \chi^2(1).$$

题型十二: 参数的矩估计与最大似然估计

1. 设总体 X 的密度函数为 $f(x, \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} (-\infty < x < +\infty)$, 求参数 θ 的矩估计量和最大

似然估计量。

解答：

显然 $EX = 0$ ，

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, \theta) dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^2 e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) = \theta^2 \Gamma(3) = 2\theta^2,$$

由 $EX^2 = A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ，得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \frac{1}{(2\theta)^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|},$$

$$\text{则 } \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = -n \ln(2\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

由 $\frac{d}{d\theta} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ ，得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

则参数 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

2. 设总体 $X \sim F(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 2\theta, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases} (0 < \theta < \frac{1}{2})$ ，样本值为 1, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 3，求 θ 的矩估计和最大似然估计。

解答：

(1) X 为离散型随机变量，其分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta & 1-2\theta \end{pmatrix}, \quad EX = 3 - 3\theta.$$

$$\bar{x} = \frac{1+1+3+2+1+2+3+3}{8} = 2, \quad \text{令 } 3-3\theta = 2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{3}.$$

(2) $L(1, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 3; \theta) = P\{X=1\}P\{X=1\} \cdots P\{X=3\} = \theta^3 \times \theta^2 \times (1-2\theta)^3,$

$$\ln L = 5 \ln \theta + 3 \ln(1-2\theta),$$

$$\text{令 } \frac{d}{d\theta} \ln L = \frac{5}{\theta} - \frac{6}{1-2\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{5}{16}.$$

题型十三：假设检验（数学一）

1. 设某次考试考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，平均成为为 66.5 分，标准差为 15 分。问在显著性水平为 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？

解答：

考生的考试成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，标准差 $S = 15$ ，

令 $H_0: \mu = \mu_0 = 70$ ， $H_1: \mu \neq 70$ ，

$$\text{选统计量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1),$$

临界点 $t_{0.975}(36-1) = 2.0301$ ，又 $\bar{x} = 66.5$ ，

因为 $|t| = \left| \frac{66.5 - 70}{\frac{15}{6}} \right| = 1.4 < 2.0301$ ，所以接受 H_0 ，即可以认为全体考生的平均成绩为 70

分。

